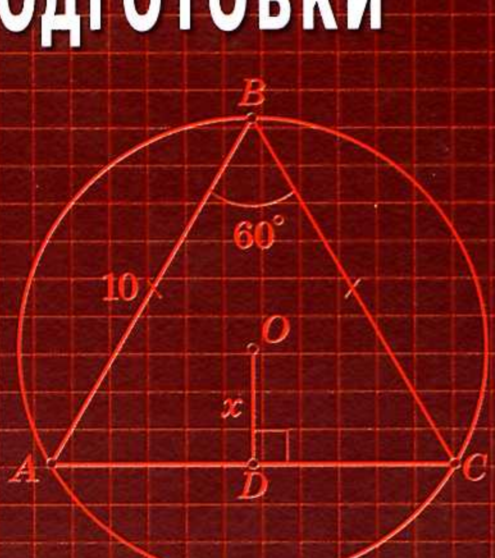
Э.Н. Балаян

Геометрия

задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ



7–9 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ

7–9 классы

Издание пятое, исправленное и дополненное

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ : 7–9 классы / Э.Н. Балаян. — Изд. 5-е, исправл. и дополн. — Ростов н/Д : Феникс, 2013. — 223 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-20490-0

Предлагаемое вниманию читателя пособие содержит более 1000 разноуровневых задач и упражнений по основным темам программы геометрии (планиметрии) 7–9 классов, скомпонованных в 3 комплекта по готовым чертежам. 7 класс содержит 12 таблиц, 8 класс — 25, 9 — 12 таблиц.

Эти упражнения дают возможность учителю в течение минимума времени решить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами. К наиболее трудным задачам приведены решения и указания.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, студентам — будущим учителям, учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также выпускникам для подготовки к ГИА и ЕГЭ.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-20490-0 ББК 22.1я72

Предисловие

На начальном этапе изучения геометрии основную трудность для учащихся представляет выполнение чертежа. Кроме того, на его выполнение расходуется много времени.

Предлагаемое вниманию читателя пособие ставит целью устранить этот пробел с помощью готовых чертежей.

На уроках геометрии очень часто каждое высказывание и ответ на вопрос должны, как правило, сопровождаться демонстрацией чертежа, причем чертеж и данные из условия задачи должны находиться перед глазами учащихся в процессе решения задачи. Когда учащиеся наглядно видят условие, то легче решают задачи. По этой причине упражнения на готовых чертежах оказывают неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем, дают возможность в течение минимума времени усвоить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, эти упражнения способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

В пособии на всех чертежах равные углы и отрезки отмечены одинаковыми знаками, прямые углы — квадратиками, это дает возможность учащимся значительно быстрее ориентироваться в условиях задачи. Большинство задач предназначены в качестве устных упражнений. Учитель может по своему усмотрению заранее подготовить их на доске или плакатах и отводить на решение по 10–15 минут в начале каждого урока. Поскольку задачи есть и посложнее (они расположены, как правило, в конце каждой таблицы), то учитель может выбрать те или иные упражнения в зависимости от уровня подготовленности класса.

При выполнении упражнений происходит активная мыслительная деятельность учащихся, что в свою очередь приводит к эффективному непроизвольному запоминанию определений, свойств и признаков изучаемых фигур. Определения, свойства и признаки рассматриваемых фигур периодически повторяются в процессе выполнения разнообразных упражнений, что приводит в итоге к продуктивному запоминанию. Большое значение имеет и то, что учащиеся с бóльшим удовольствием предпочитают выполнять эти упражнения, чем отвечать на теоретические вопросы.

Наконец, предлагаемые упражнения быстро готовят учащихся к запоминанию и самостоятельному решению таких задач, для которых эти упражнения являются элементами.

Предлагаемая методика проведения уроков с использованием упражнений на готовых чертежах, несомненно, способствует повышению творческой активности учащихся, развитию логического мышления, является эффективным средством усвоения и закрепления теоретического материала.

Пособие представляет собой три комплекта упражнений по геометрии для учащихся 7–9 классов, составленных в виде таблиц. Все задания соответствуют ныне действующей программе по геометрии (планиметрии). Пособие может быть использовано учителями, работающими по учебнику Л.С. Атанасяна «Геометрия, 7–11» и другим книгам.

В пособии 12 таблиц для 7 класса, 25 для 8 и 12 для 9 класса. В каждой таблице количество задач различно. Как правило, они составлены в порядке возрастающей трудности, что дает возможность учителю проводить работу дифференцированно.

К наиболее трудным задачам приведены подробные решения с пояснениями, а к остальным — указания и ответы, что дает возможность проверить правильность решения.

Отметим, что предлагаемые упражнения не ставят целью заменить систему задач из вышеуказанных пособий, а являются лишь дополнением к ней. Они дают возможность учителю сэкономить значительную часть времени на изучение соответствующих тем и способствуют усилению практической направленности преподавания геометрии.

Раздел I

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

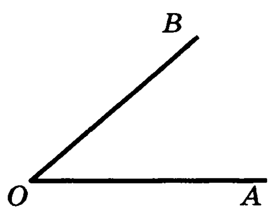


Рис. 1

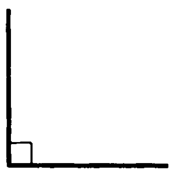


Рис. 2

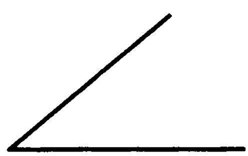


Рис. 3

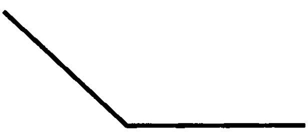


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

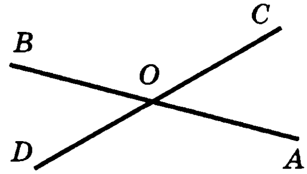


Рис. 5

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

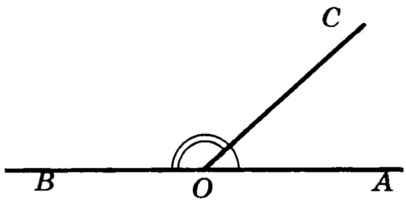


Рис. 6

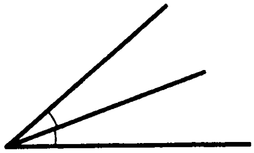


Рис. 7

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

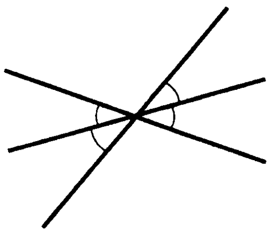


Рис. 8

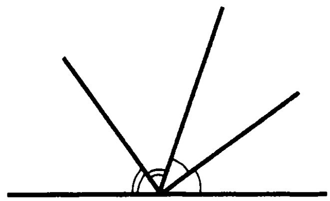


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;
внутренние накрест лежащие:
$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;
внешние накрест лежащие:
$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;
внутренние односторонние:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;
внешние односторонние:
$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

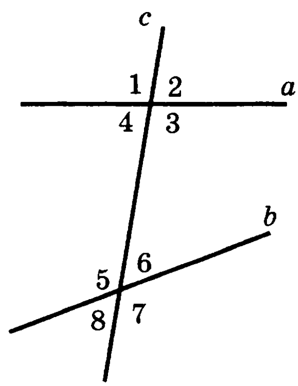


Рис. 10

2. Многоугольник

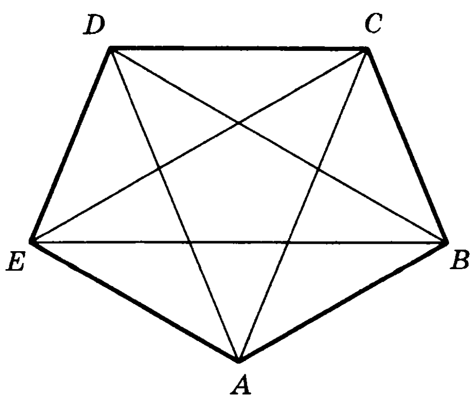


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

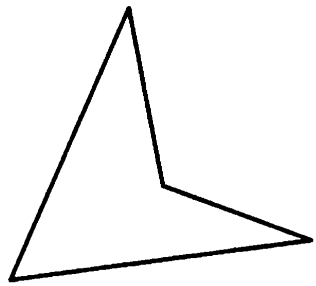


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n-угольника равен $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.

6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a = 2R\sin\dfrac{180°}{n}$.

7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a = 2r\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

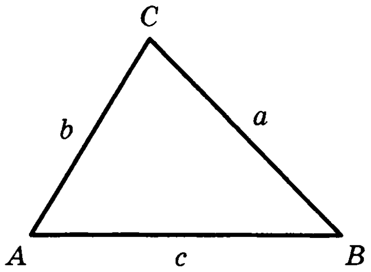


Рис. 13

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны,** $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — **углы.**

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\ BC = a,\ AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

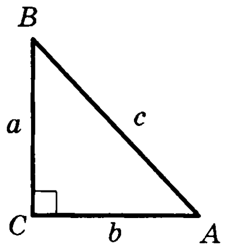


Рис. 14

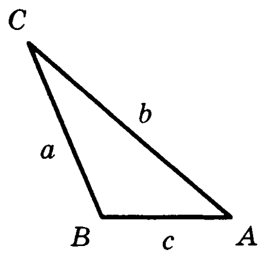


Рис. 15

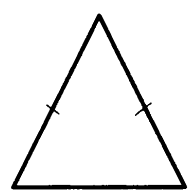


Рис. 16

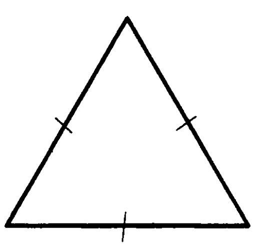


Рис. 17

Равные стороны называются **боковыми,** а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

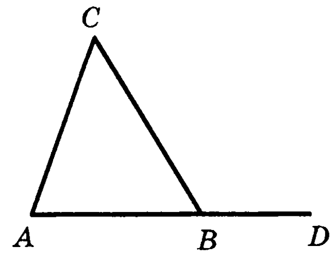


Рис. 18

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

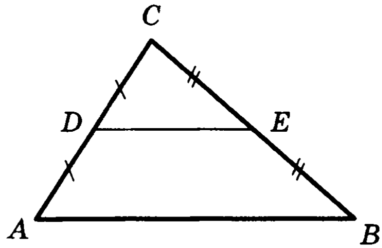


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак *(признак равенства по двум сторонам и углу между ними)*

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

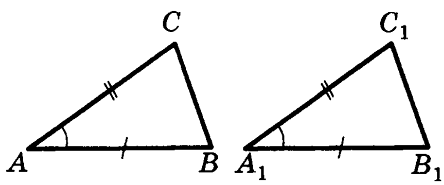


Рис. 20

II признак *(признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам)*

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

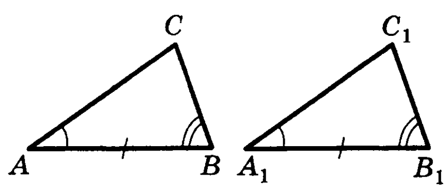


Рис. 21

III признак *(признак равенства по трем сторонам)*

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

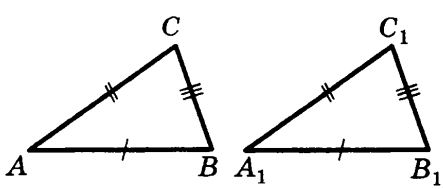


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

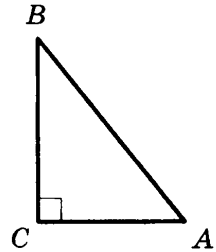


Рис. 23

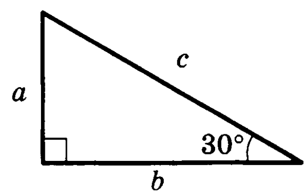


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. **Если катеты** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

2. **Если катет и прилежащий к нему острый угол** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

3. **Если гипотенуза и острый угол** одного прямоугольного треугольника

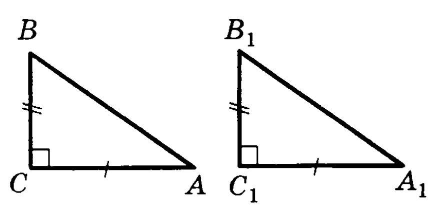


Рис. 25

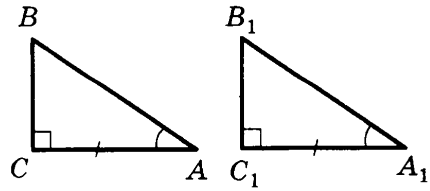


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

4. **Если гипотенуза и катет** одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

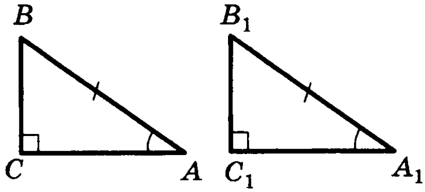


Рис. 27

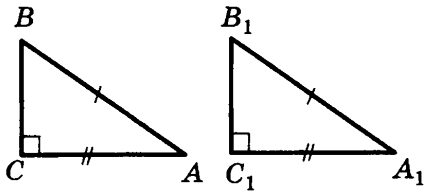


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:
1) точка пересечения медиан;
2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

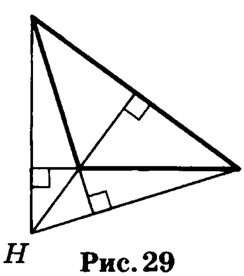


Рис. 29

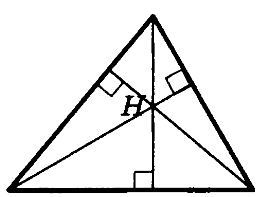


Рис. 30

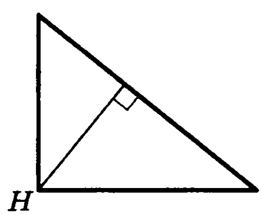


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.** В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

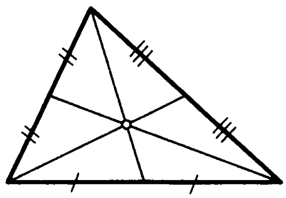


Рис. 32

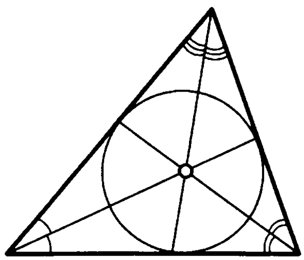


Рис. 33

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

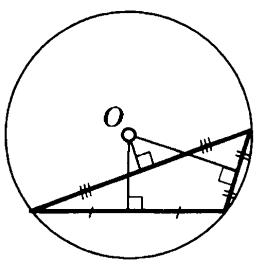


Рис. 34

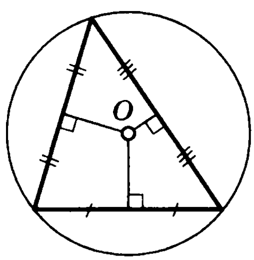


Рис. 35

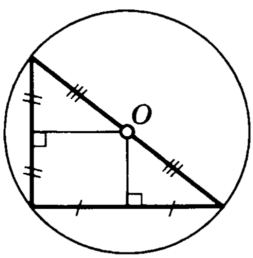


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

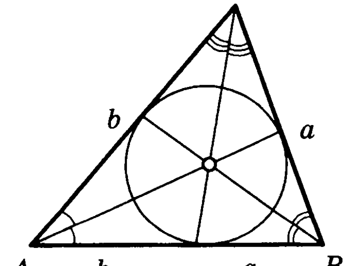


Рис. 37

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\,.$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c.

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\,.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\,.$$

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1.$$

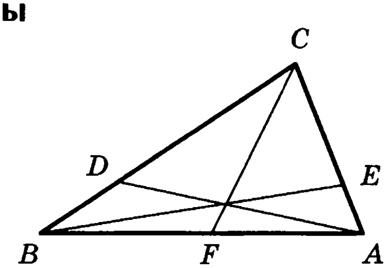


Рис. 38

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

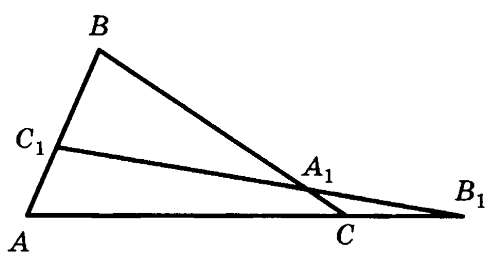


Рис. 39

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

16. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2}ah_a;$

2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

4) $S = p\,r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c);$

5) $S = \frac{abc}{4R};$

6) $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$

17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$;

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

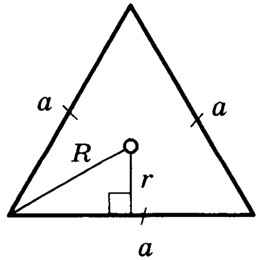


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

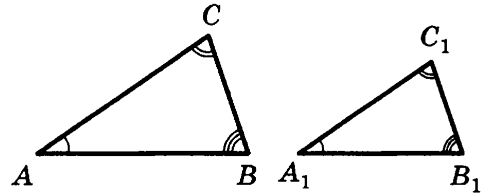


Рис. 41

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

19. Признаки подобия треугольников

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = A_1,\ \angle B = B_1.$$

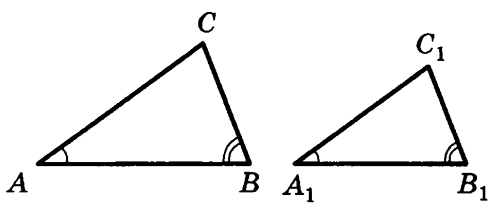


Рис. 42

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

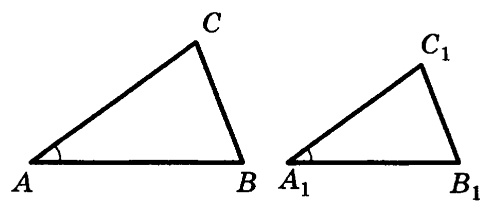


Рис. 43

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

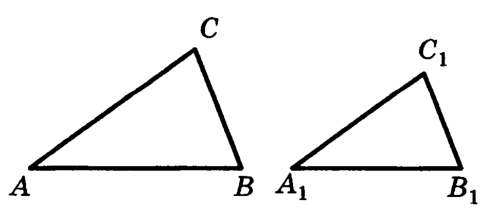


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

20. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

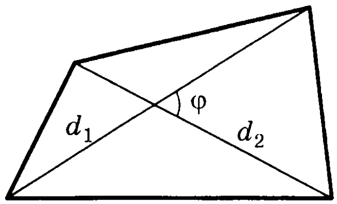


Рис. 45

2. Вписанный (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

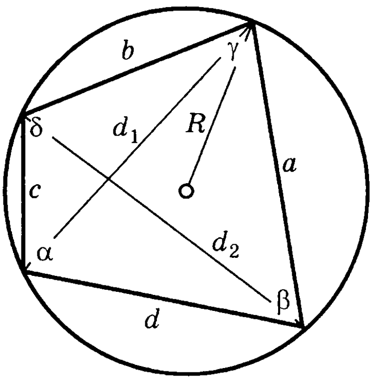


Рис. 46

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

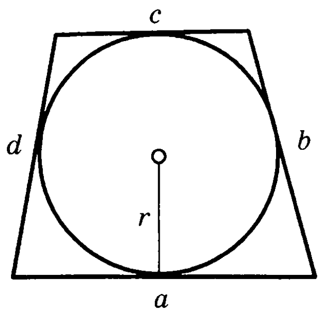


Рис. 47

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

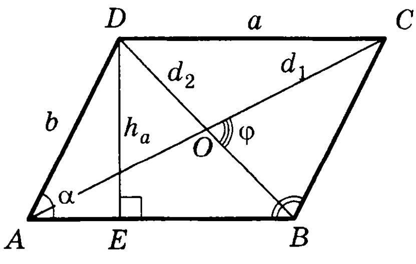


Рис. 48

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180°$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

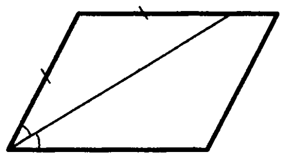


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b – основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

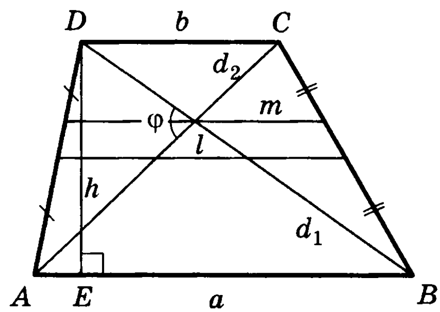


Рис. 50

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$m \parallel a \parallel b$, $m = \frac{2ab}{a+b}$.

$\angle A + \angle D = 180°$; $\angle B + \angle C = 180°$.

$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$ — площадь трапеции.

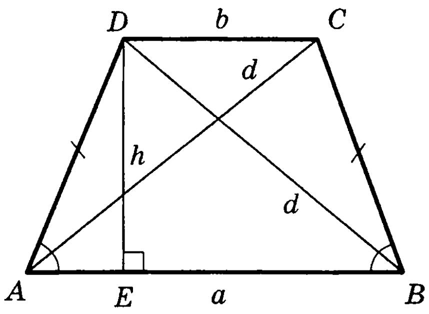


Рис. 51

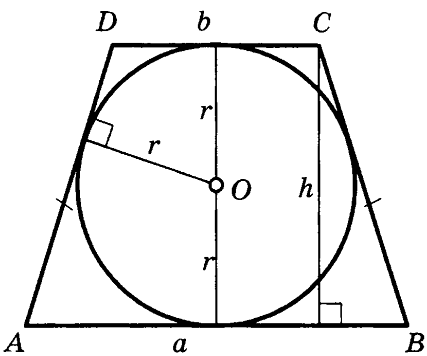


Рис. 52

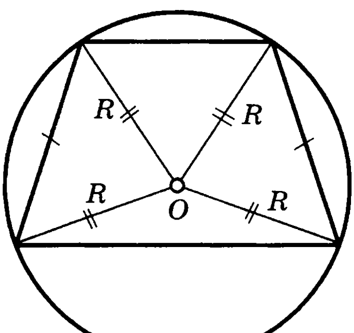


Рис. 53

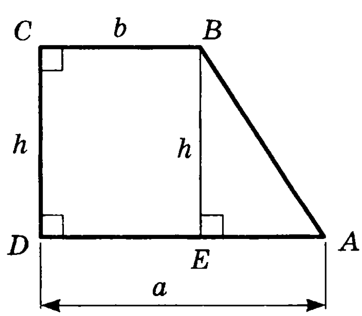


Рис. 54

1. Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

2. Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90°.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции)}.$$

$$AE = a - b.$$

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

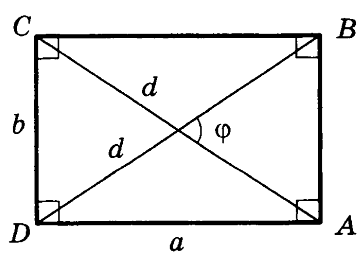


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, **у прямоугольника диагонали равны.**

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$

24. Ромб

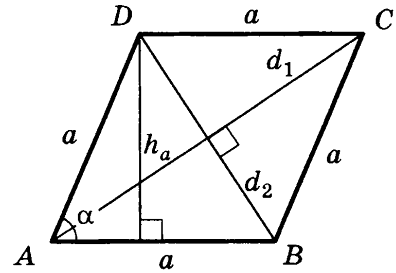


Рис. 56

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C; BD — биссектриса углов B и D.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

25. Квадрат

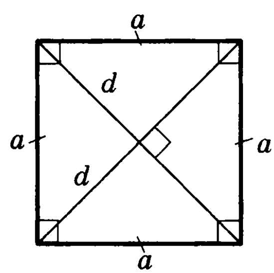


Рис. 57

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

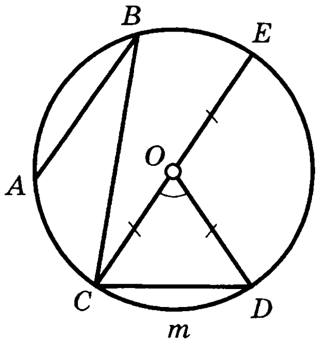


Рис. 58

Обозначение: r или R.

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой,** а хорда, проходящая через центр, — **диаметром.**

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом.**

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором.**

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

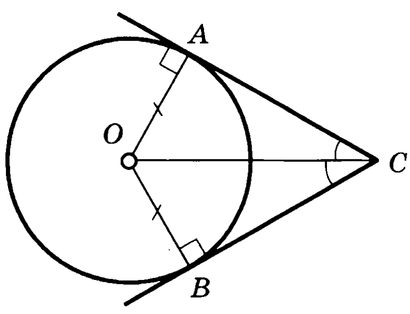


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

28. Окружность и треугольник

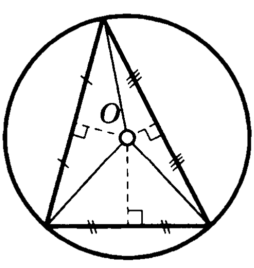


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).
2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

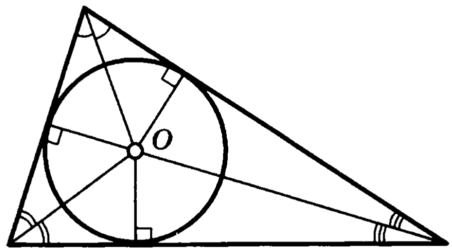


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180°.$$

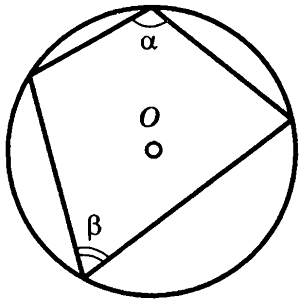


Рис. 62

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

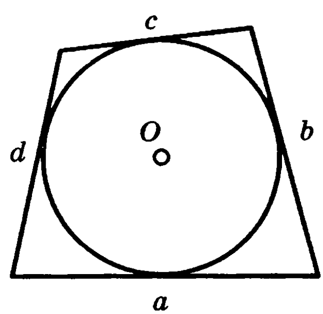


Рис. 63

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \smile AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AmC.$$

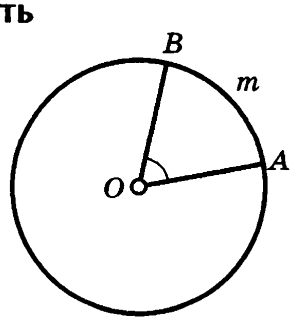


Рис. 64

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\smile AmC + \smile BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AmC - \smile CnD).$$

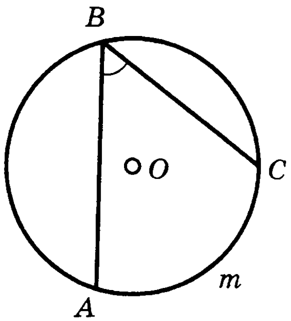


Рис. 65

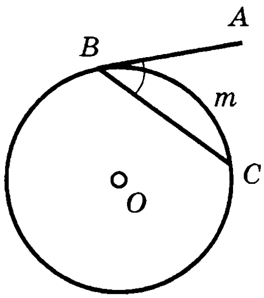


Рис. 66

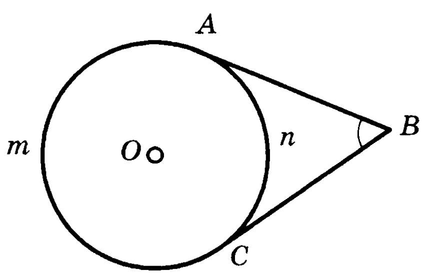


Рис. 67

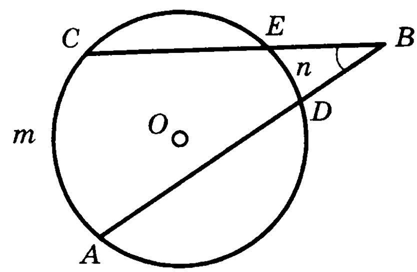


Рис. 69

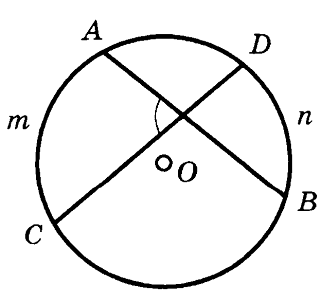
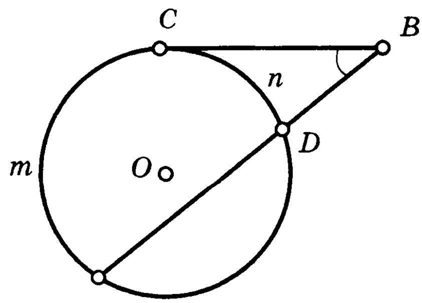


Рис. 68



A **Рис. 70**

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

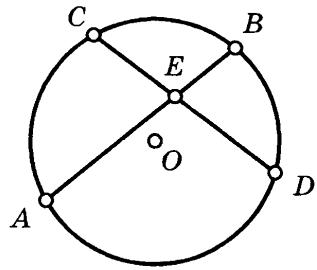


Рис. 71

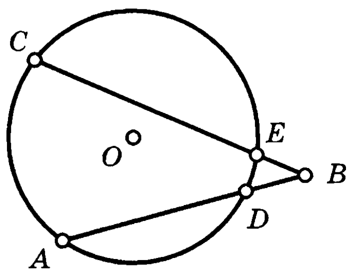


Рис. 72

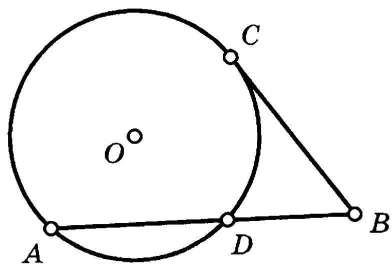


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{кр} = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{2}CR$ — площадь круга;

$\pi = \dfrac{C}{D} \approx 3{,}14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

$S_{сект.} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора.

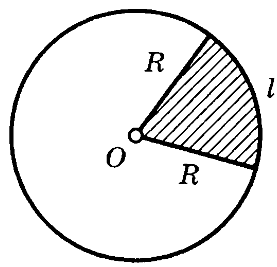


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

1) начальной точкой;
2) направлением;
3) длиной (модулем).

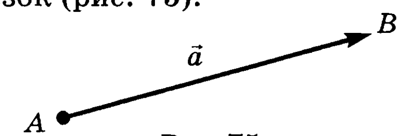


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$\vec{a}$, $\vec{m}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Неколлинеарные векторы:

$\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{ST}$.

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$.

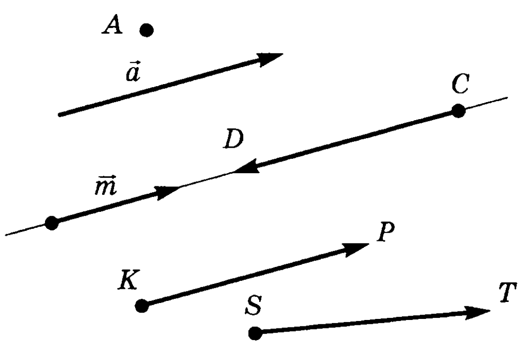


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75). *Координатами вектора* $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И обратно, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ (правило треугольника),}$$

$$\text{или } \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

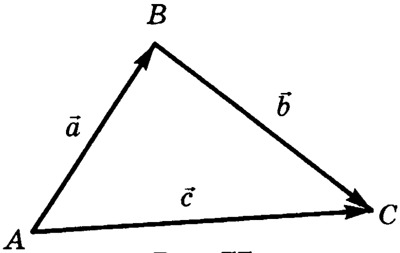


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

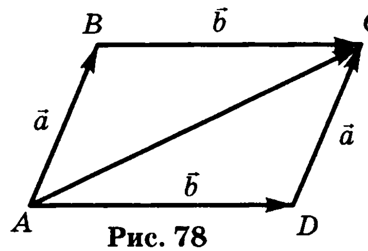


Рис. 78

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

4. *Разностью векторов* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a} \text{ (рис. 79).}$$

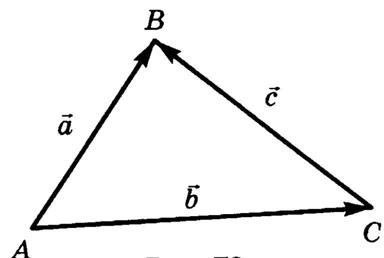


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ *на число* k называется вектор $k\vec{a}(ka_1;\ ka_2)$.

Из определения следует, что:

1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;*

2) *для любого числа* k *и любого вектора* $\vec{a}$ *векторы* $\vec{a}$ *и* $k\vec{a}$ *коллинеарны.*

Основные свойства умножения вектора на число:

1) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ — *сочетательный* закон;

2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *I распределительный* закон;

3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *II распределительный* закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$

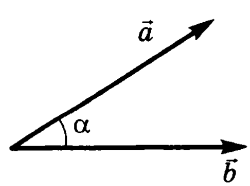


Рис. 80

1) Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$, тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Верно и обратное: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2) Если $\alpha<90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; если $\alpha>90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a}\perp\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон);
3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон);
4) $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

40. Уравнение окружности

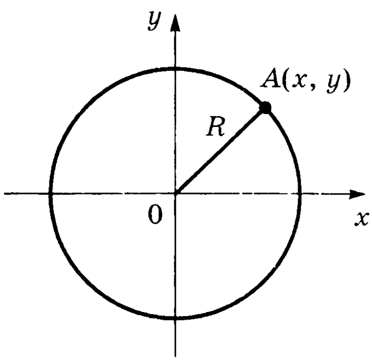


Рис. 81

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности $M(x_0;\ y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

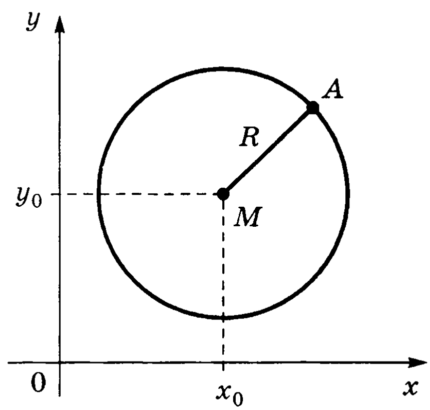


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

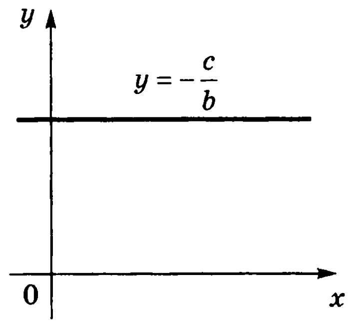


Рис. 83

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

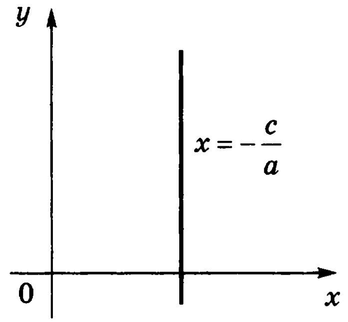


Рис. 84

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат (0; 0) (рис. 85).

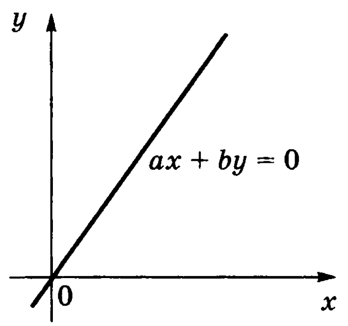


Рис. 85

Раздел II

УПРАЖНЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ

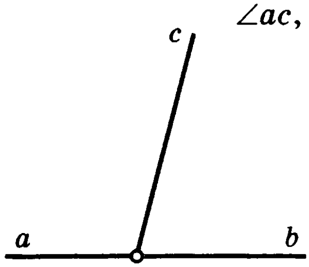
VII класс

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Таблица 1

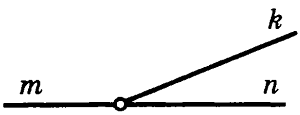
1

$\angle ac - \angle cb = 25°$
$\angle ac, \angle cb$ — ?



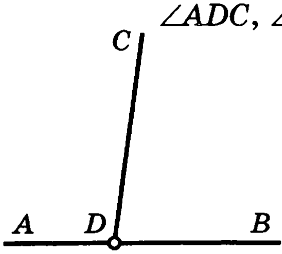
2

$\angle mk = 8\ \angle kn$
$\angle mk, \angle kn$ — ?



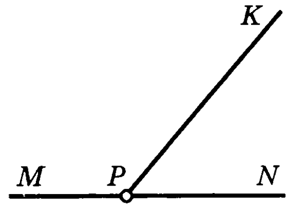
3

$\angle CDB : \angle ADC = 4 : 5$
$\angle ADC, \angle CDB$ — ?



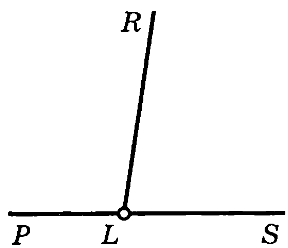
4

$\angle MPK = 2{,}6\ \angle KPN$
$\angle MPK, \angle KPN$ — ?



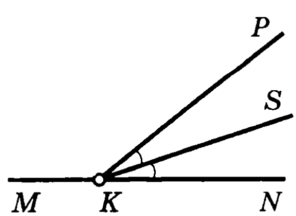
5

$\angle RLS = 80\%\ \angle PLR$
$\angle PLR, \angle RLS$ — ?



6

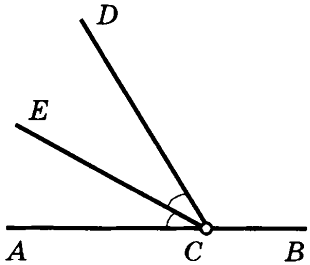
$\angle PKN = 40°$
$\angle MKS$ — ?



Окончание табл. 1

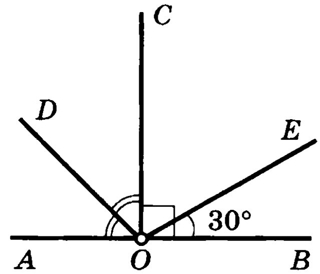
7

$\angle BCD = 120^\circ$
$\angle BCE$ — ?



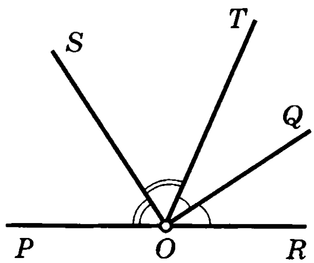
10

$\angle DOE$ — ?



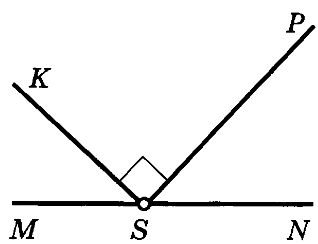
8

$\angle SOQ$ — ?



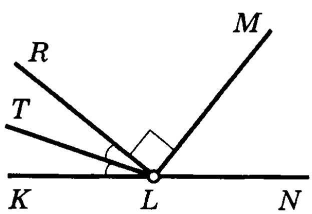
11

$\angle MSP = \angle NSK$
$\angle MSP$ — ?



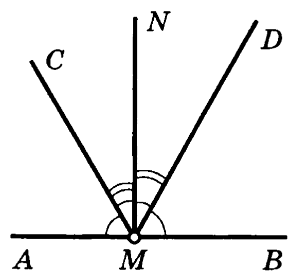
9

$\angle KLR = 40^\circ$
$\angle TLN$ — ?



12

$\angle AMN$, $\angle BMN$ — ?

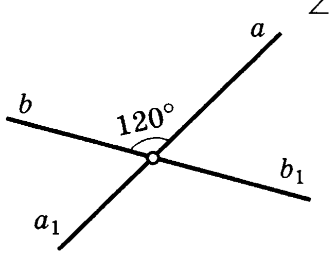


ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Таблица 2

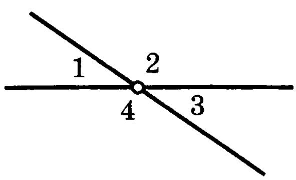
1

$\angle a_1b_1$ — ?
$\angle ab_1$ — ?



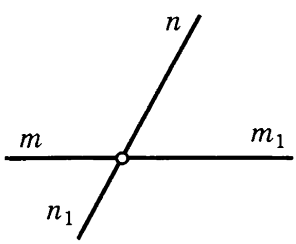
2

$\angle 1 + \angle 3 = 70°$
$\angle 2, \angle 4$ — ?



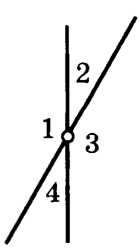
3

$\angle mn_1 + \angle m_1n_1 + \angle m_1n = 240°$
$\angle mn$ — ?



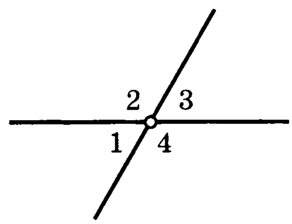
4

$\angle 1 - \angle 2 = 120°$
$\angle 3, \angle 4$ — ?



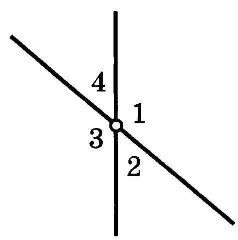
5

$2(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$
$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ — ?



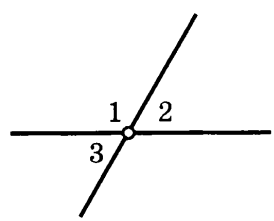
6

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 5\angle 4$
$\angle 4$ — ?



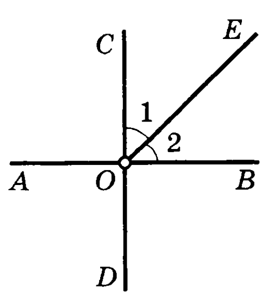
7

$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$
$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ — ?



8

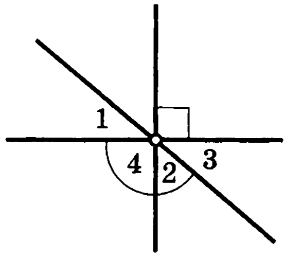
$AB \perp CD$
$\angle AOE$ — ?



Окончание табл. 2

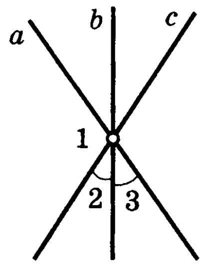
9

$\angle 1 = 40^\circ$
$\angle 2, \angle 3, \angle 4$ — ?



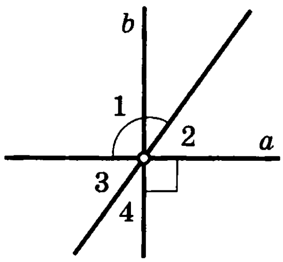
11

$\angle 1 - \angle 2 = 75^\circ$
$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ — ?



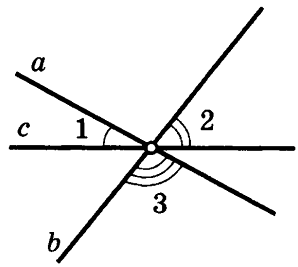
10

$\angle 1 = 125^\circ$
$\angle 2, \angle 3, \angle 4$ — ?



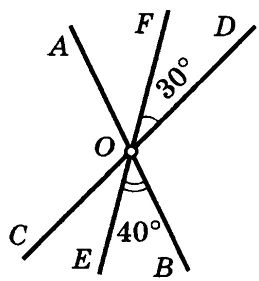
12

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ — ?



13

$\angle AOC$ — ?

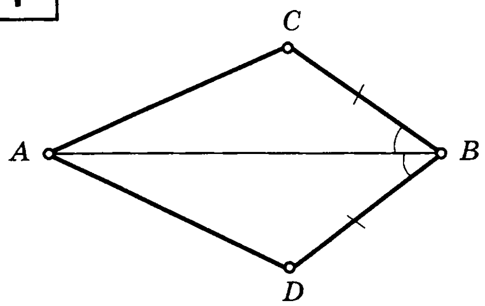


ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

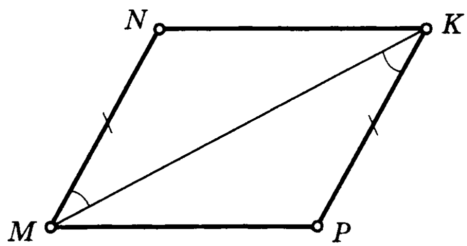
Таблица 3

Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

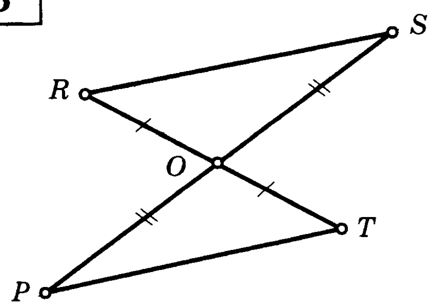
1



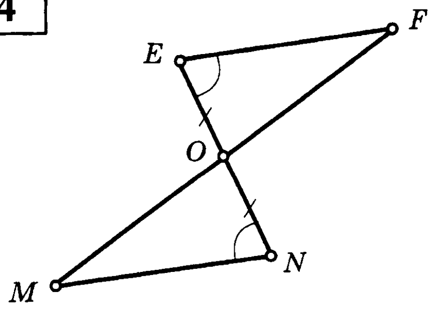
2



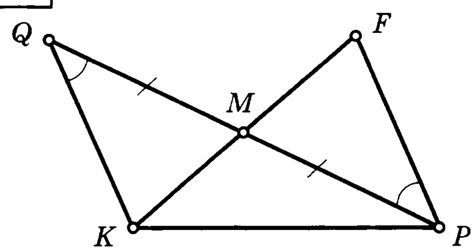
3



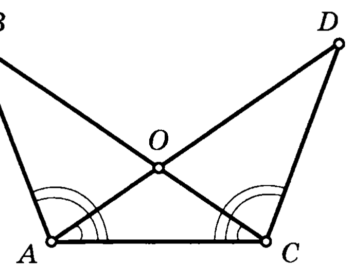
4



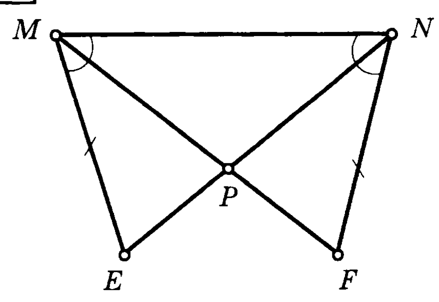
5



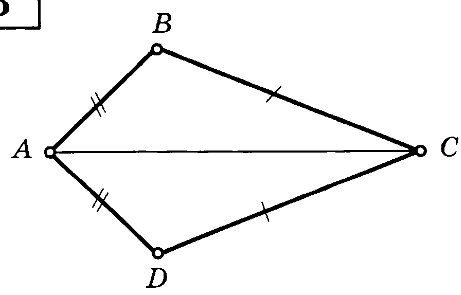
6



7

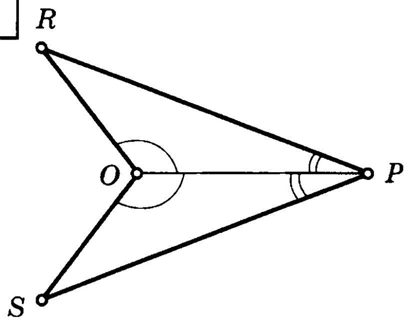


8

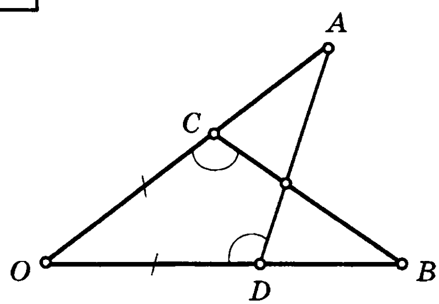


Продолжение табл. 3

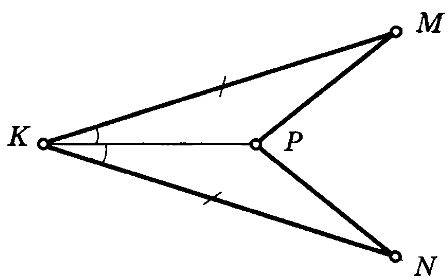
9



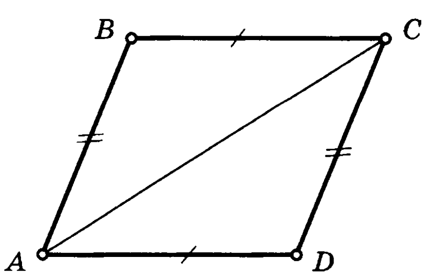
10



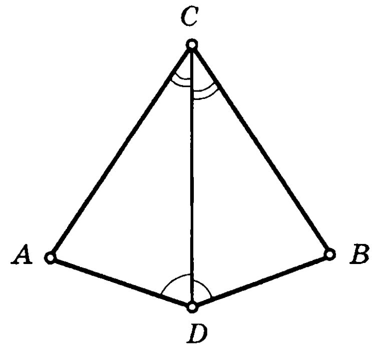
11



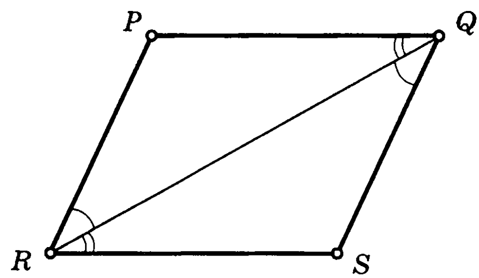
12



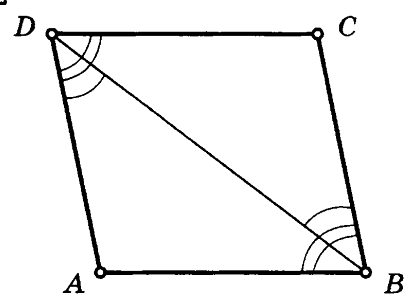
13



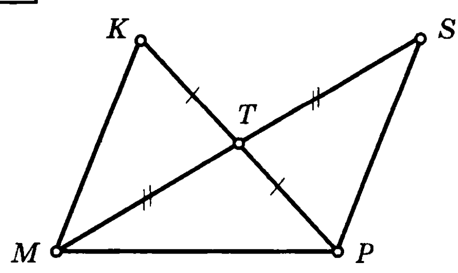
14



15



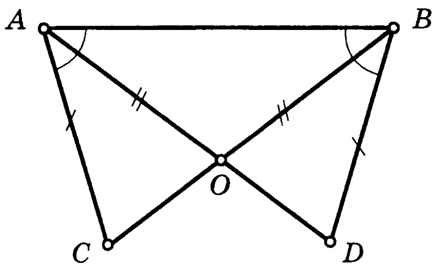
16



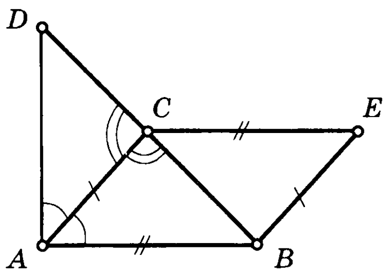
Продолжение табл. 3

17

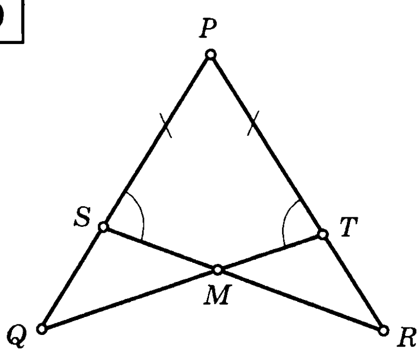
$BC = AD$



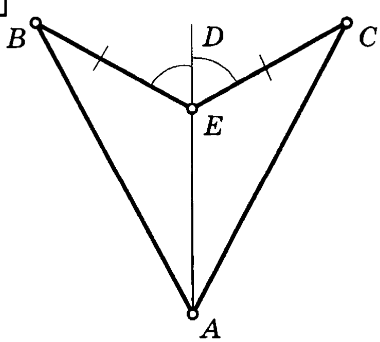
18



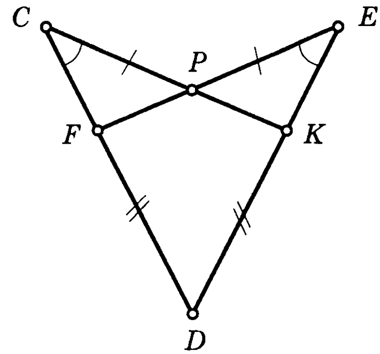
19



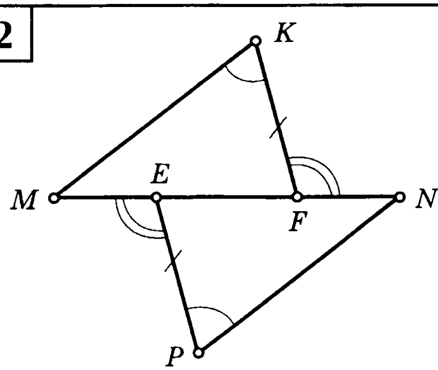
20



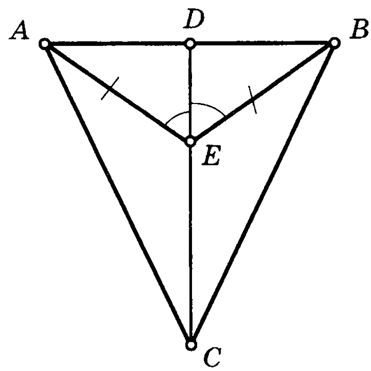
21



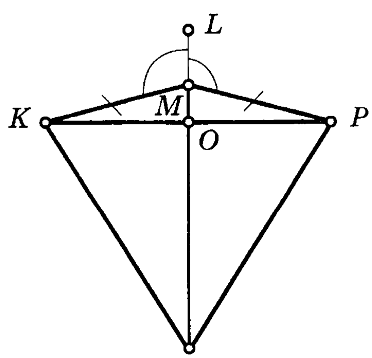
22



23

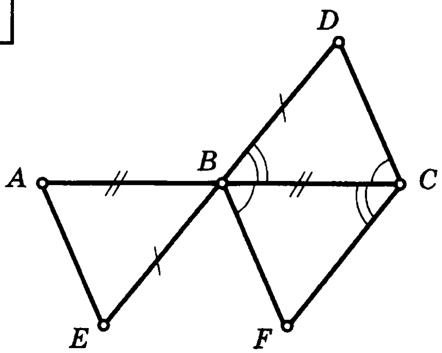


24

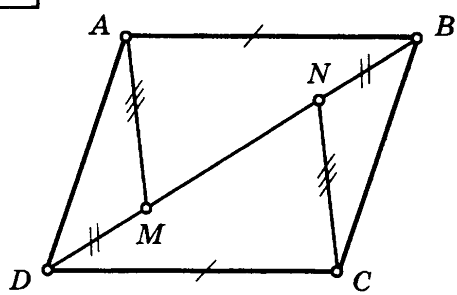


Окончание табл. 3

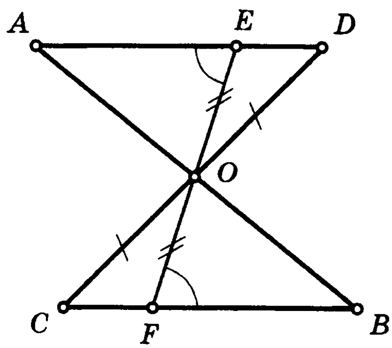
25



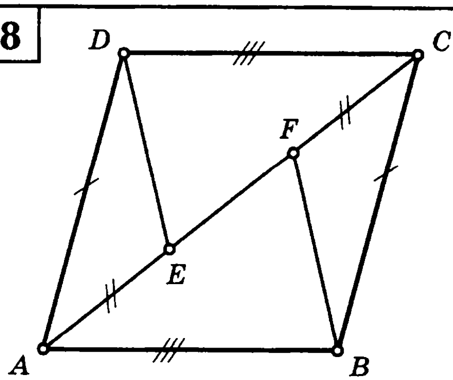
26



27

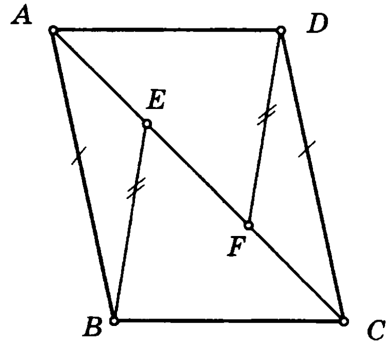


28

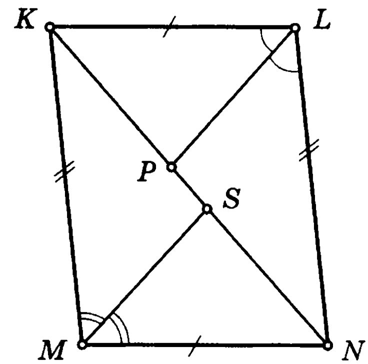


29

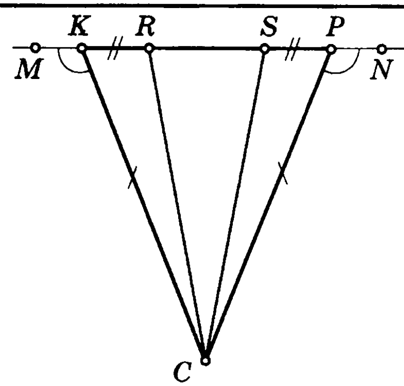
$CE = AF$



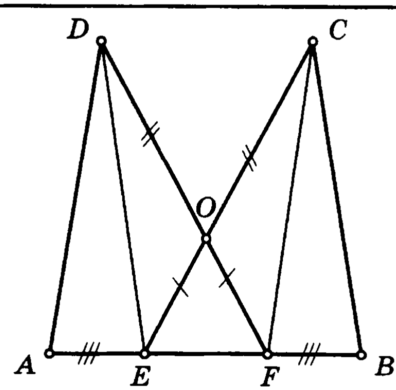
30



31



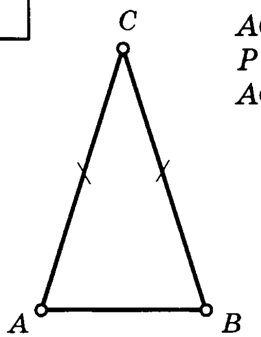
32



ПЕРИМЕТР РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

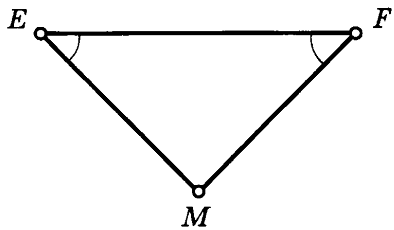
Таблица 4

1



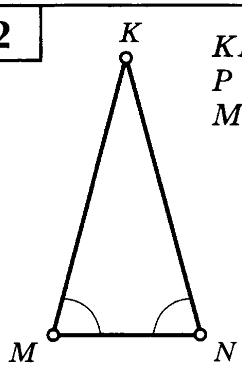
$AC = 2\,AB$
$P = 20$
$AC,\ BC,\ AB$ — ?

5



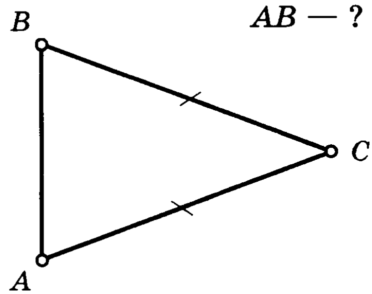
$P = 35$
$EF : EM = 3 : 2$
$EF,\ EM,\ MF$ — ?

2



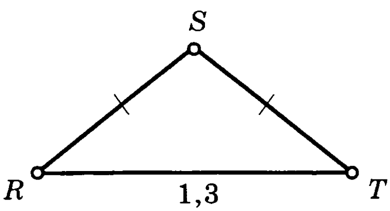
$KM - MN = 10$
$P = 26$
$MK,\ KN,\ MN$ — ?

6



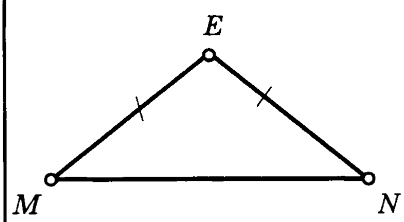
$P = 3{,}4;\ BC = 1{,}3$
AB — ?

3



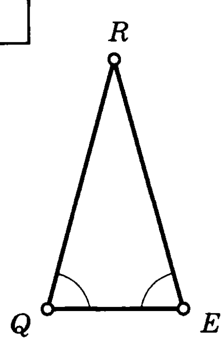
$P = 2{,}5;\ RT = 1{,}3$
$RS,\ ST$ — ?

7



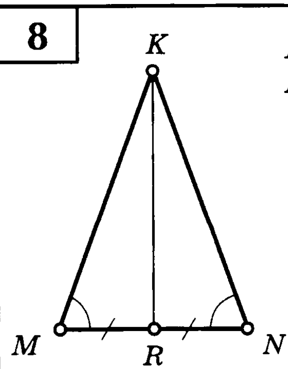
$MN - EN = 1$
$MN = 2{,}3$
P — ?

4



$P = 6{,}4$
$RQ = 3{,}5\ QE$
$QR,\ RE,\ QE$ — ?

8

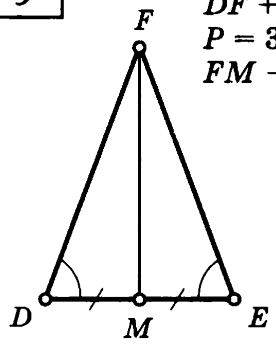


$KM + MR = 25$
P — ?

Окончание табл. 4

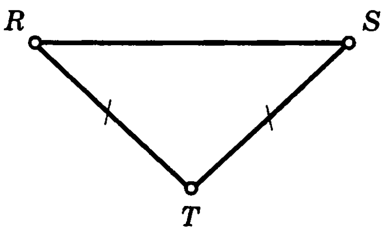
9

$DF + FM + DM = 28$
$P = 36$
FM — ?



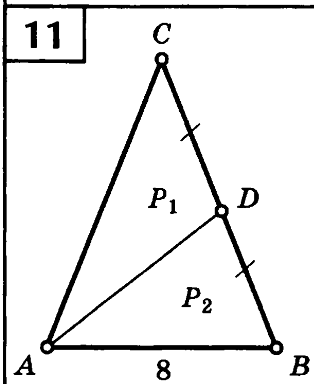
10

$RT : RS = 4 : 7$
$P = 45$
RT, TS, RS — ?



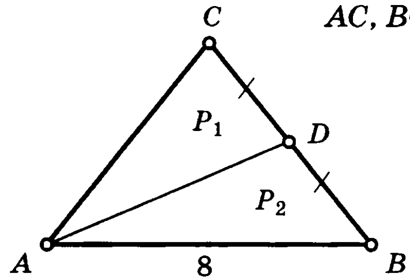
11

$AC = BC$
$P_1 - P_2 = 2$
AC, BC — ?



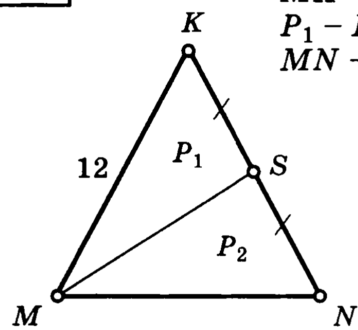
12

$AC = BC$
$P_2 - P_1 = 2$
AC, BC — ?



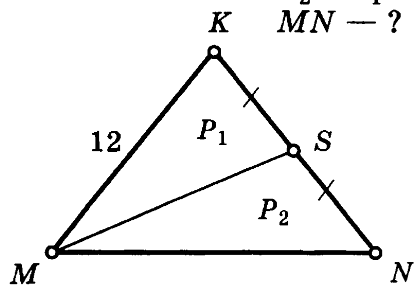
13

$MK = KN = 12$
$P_1 - P_2 = 3$
MN — ?



14

$MK = KN = 12$
$P_2 - P_1 = 3$
MN — ?

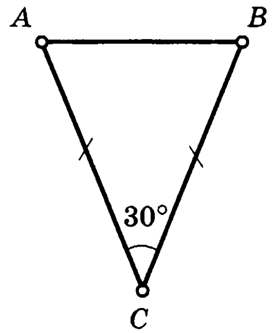


СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

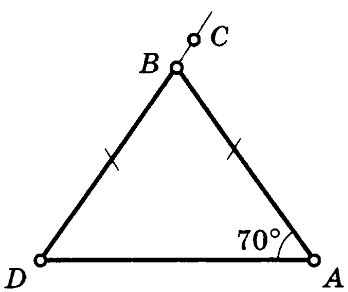
Таблица 5

Найдите $\angle CBA$.

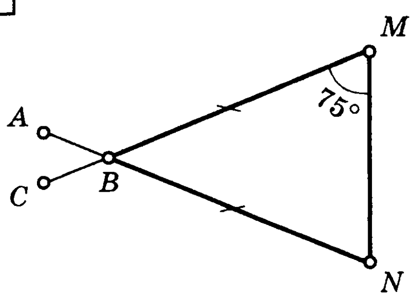
1



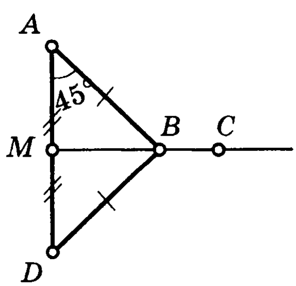
2



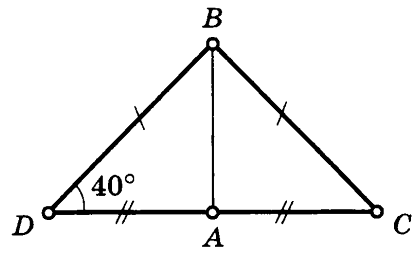
3



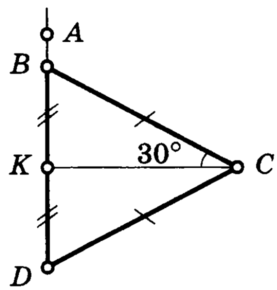
4



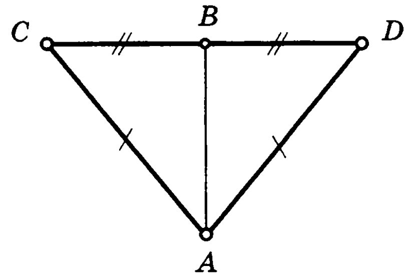
5



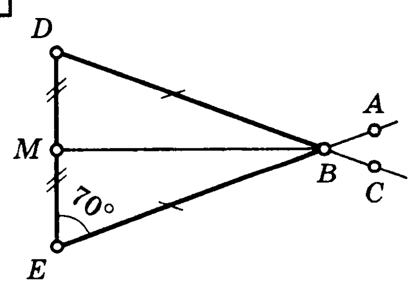
6



7

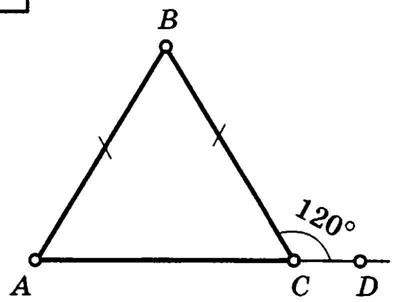


8

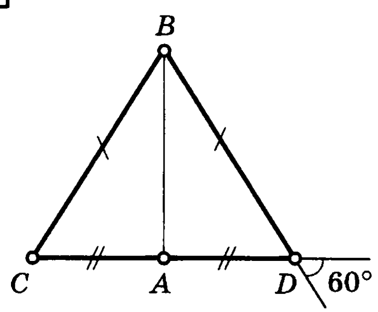


Продолжение табл. 5

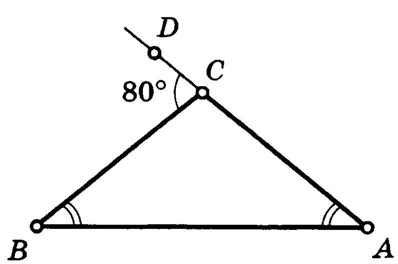
9



10

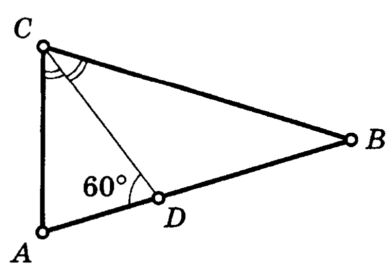


11

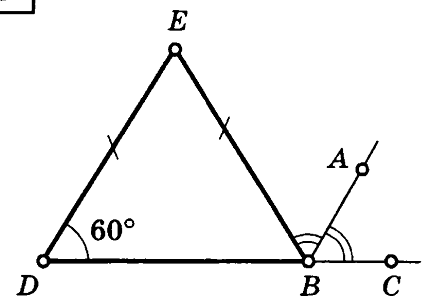


12

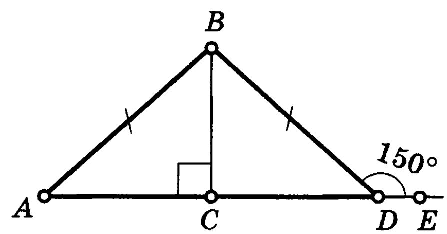
$BC = AB$



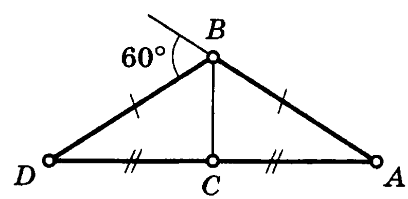
13



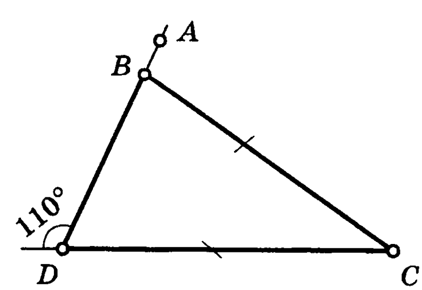
14



15

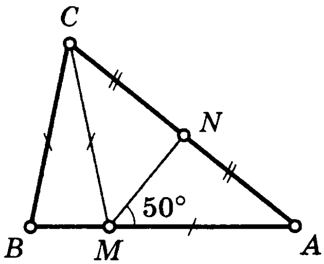


16

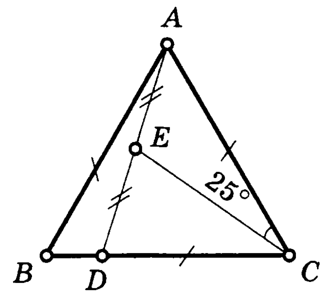


Окончание табл. 5

17



18

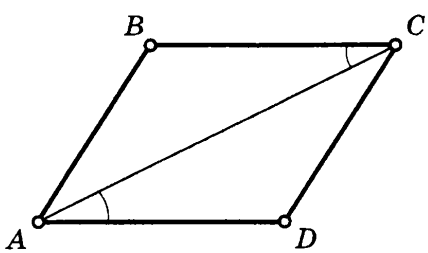


ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

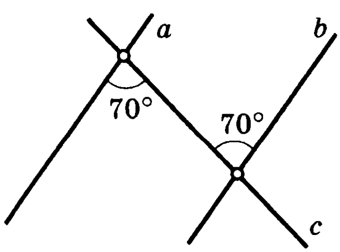
Таблица 6

Укажите пары параллельных прямых (отрезков) и докажите их параллельность.

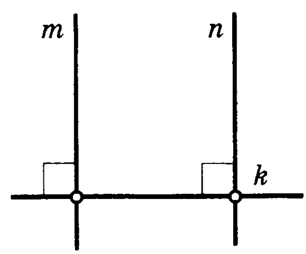
1



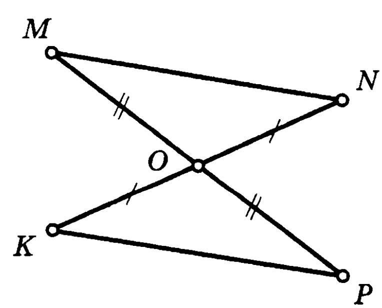
2



3

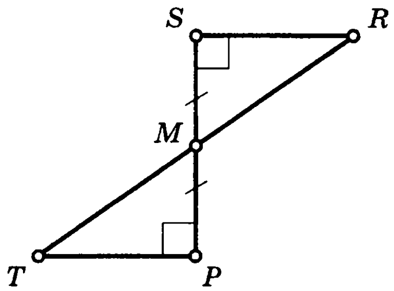


4

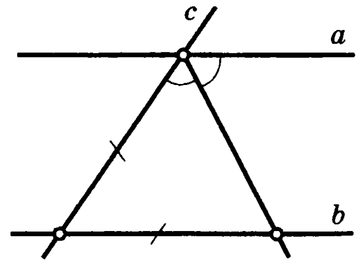


Продолжение табл. 6

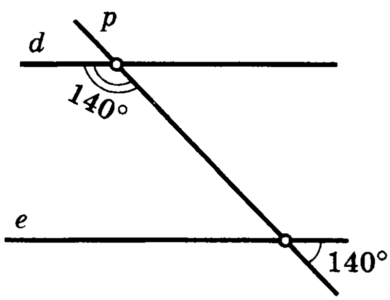
5



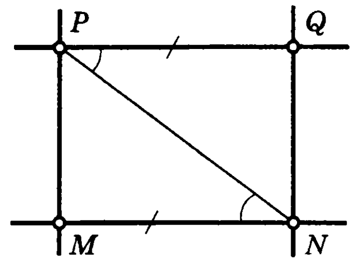
9



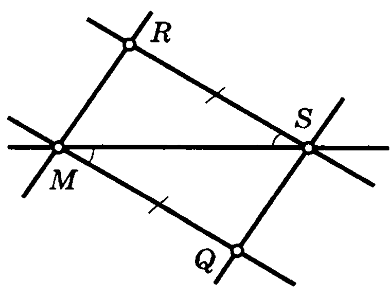
6



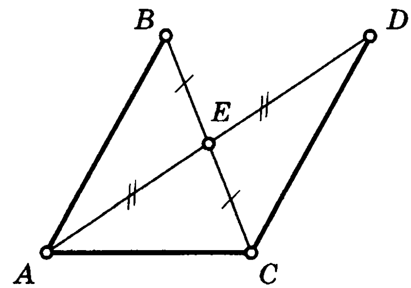
10



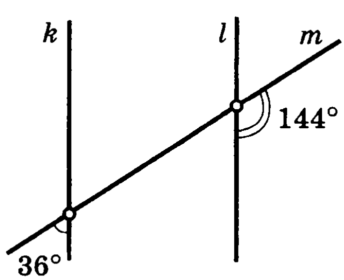
7



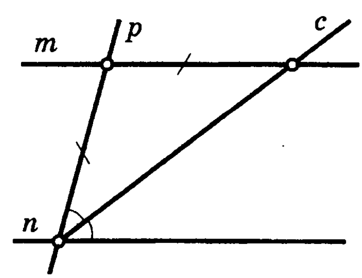
11



8

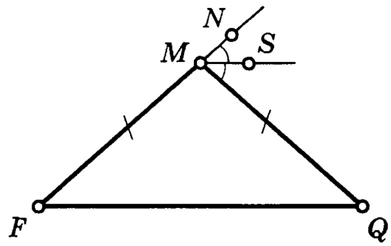


12

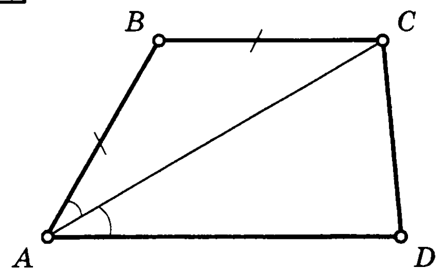


Продолжение табл. 6

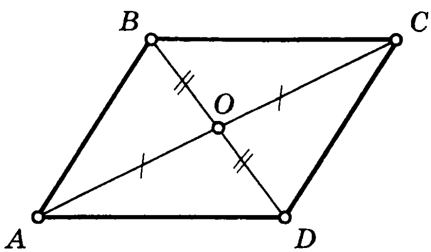
13



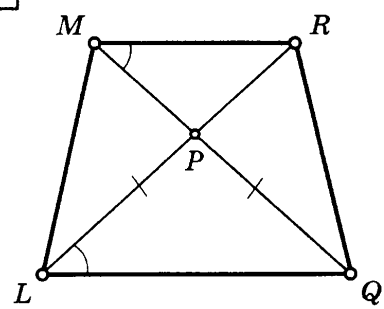
17



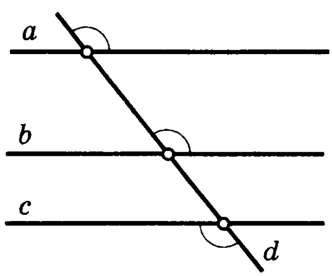
14



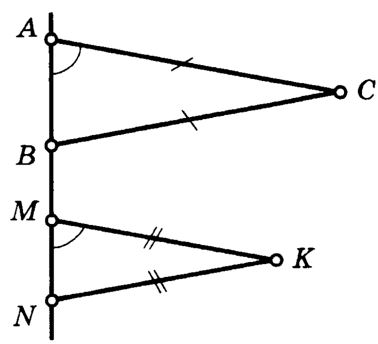
18



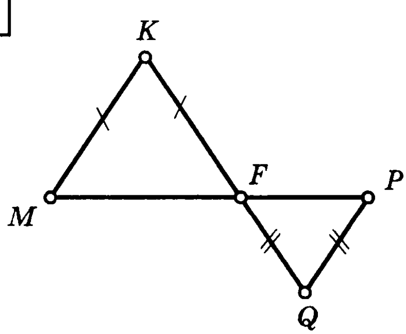
15



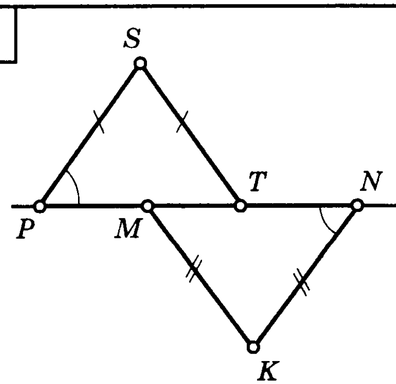
19



16

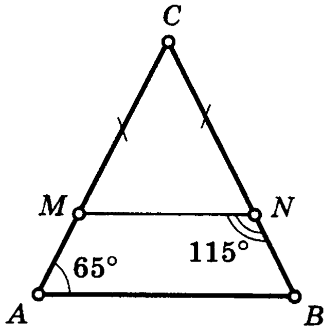


20

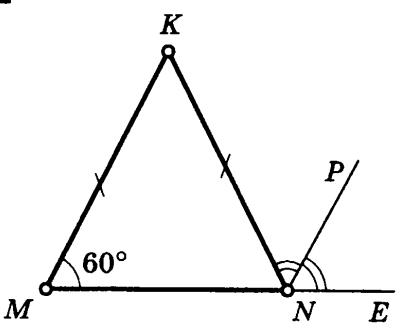


Продолжение табл. 6

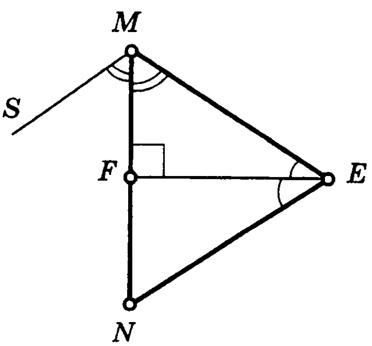
21



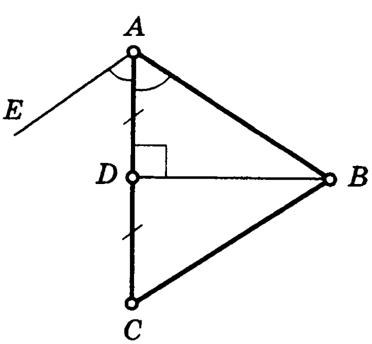
22



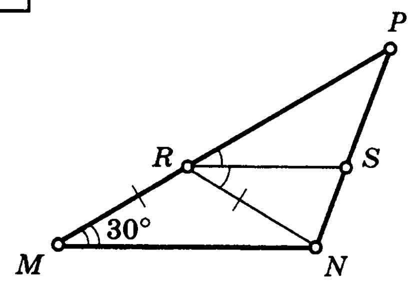
23



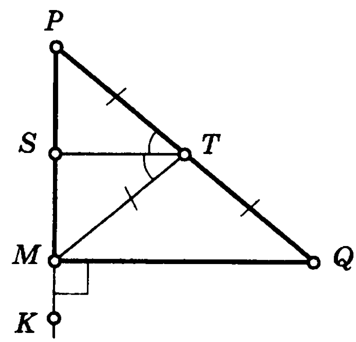
24



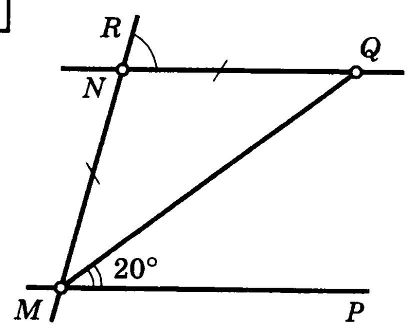
25



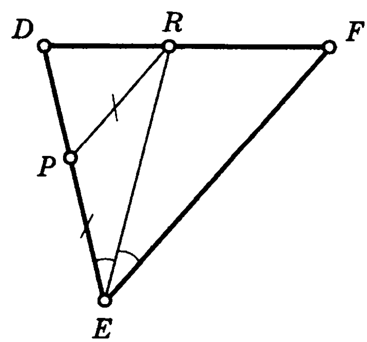
26



27

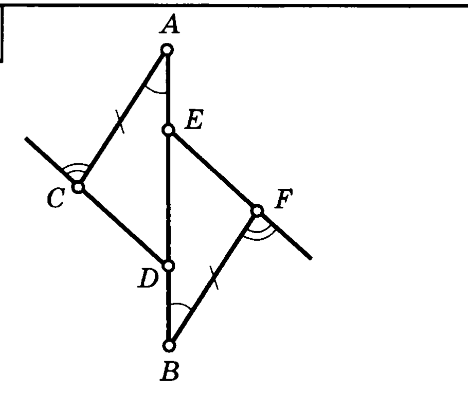


28

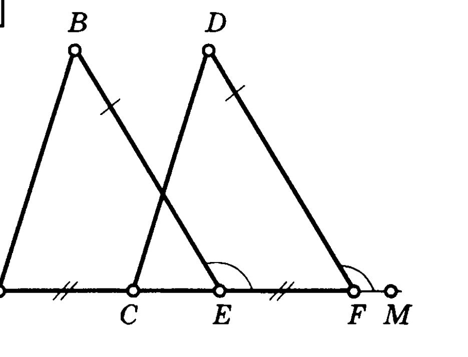


Окончание табл. 6

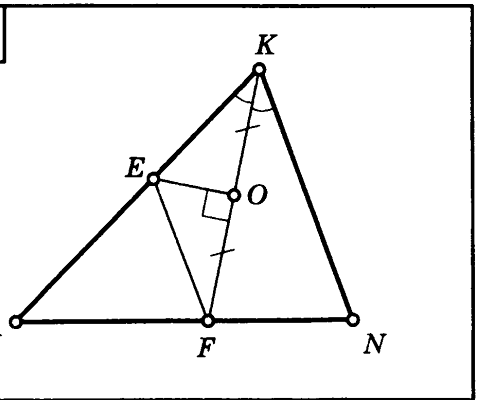
29



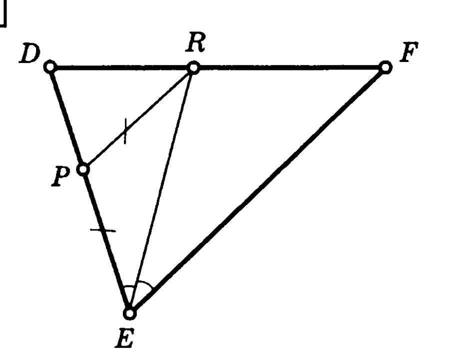
30



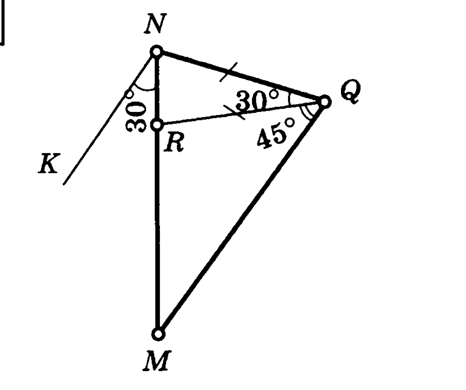
31



32



33

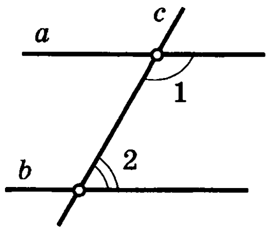


СВОЙСТВА УГЛОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Таблица 7

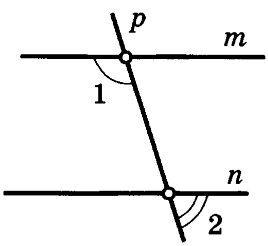
1

$a \parallel b$
c — секущая
$\angle 1 - \angle 2 = 32°$
$\angle 1, \angle 2$ — ?



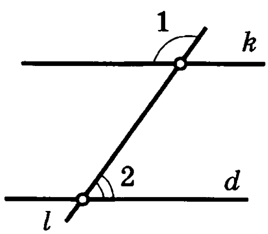
2

$m \parallel n$
p — секущая
$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$
$\angle 1, \angle 2$ — ?



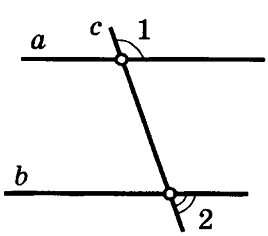
3

$k \parallel d$
l — секущая
$\angle 1 = 2{,}6\ \angle 2$
$\angle 1, \angle 2$ — ?



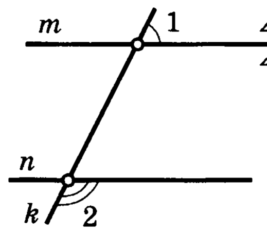
4

$a \parallel b$
c — секущая
$\angle 2 = \frac{4}{5}\ \angle 1$
$\angle 1, \angle 2$ — ?



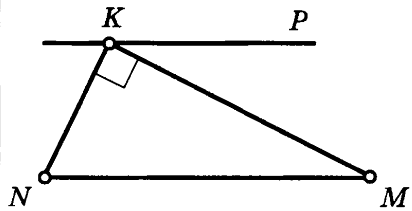
5

$m \parallel n$
k — секущая
$\angle 1 = 60\%$ от $\angle 2$
$\angle 1, \angle 2$ — ?



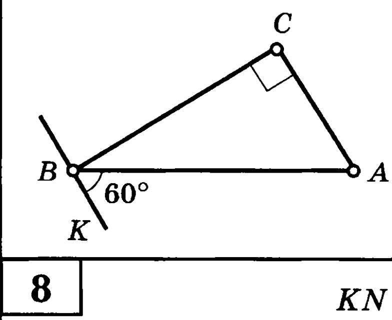
6

$KP \parallel NM$
$\angle NKP = 120°$
$\angle N, \angle M$ — ?



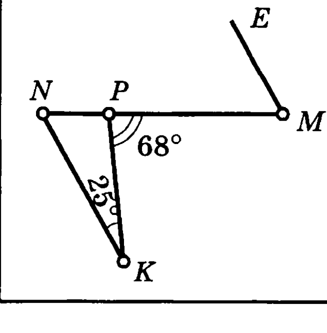
7

$AC \parallel BK$
$\angle A, \angle ABC$ — ?



8

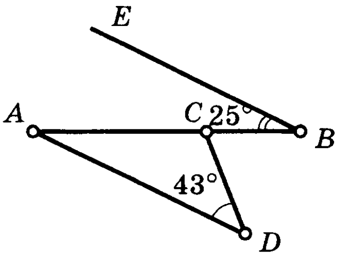
$KN \parallel ME$
$\angle EMN$ — ?



Окончание табл. 7

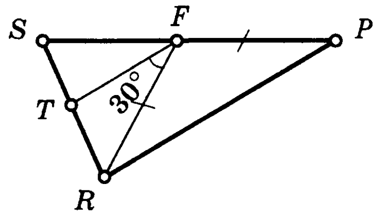
9

$AD \parallel BE$
$\angle DCB$ — ?



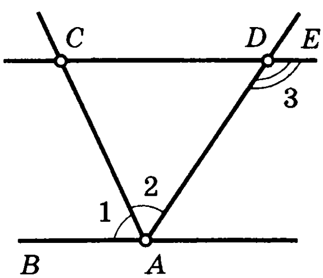
11

$TF \parallel RP$
$\angle RPF$, $\angle SFT$ — ?



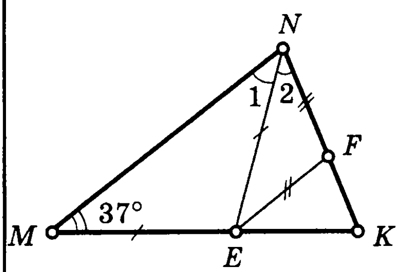
10

$CE \parallel BA$
$\angle 3 = 130°$
$\angle ACD$ — ?



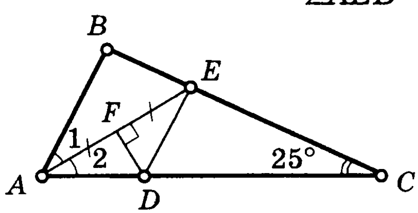
12

$\angle KFE$ — ?



13

$\angle 1 = \angle 2 = 30°$
$AB \parallel DE$
$\angle AEB$ — ?



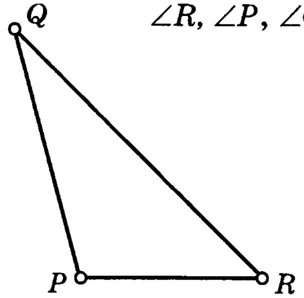
УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 8

1

$\angle R : \angle P : \angle Q = 3 : 7 : 2$

$\angle R, \angle P, \angle Q$ — ?

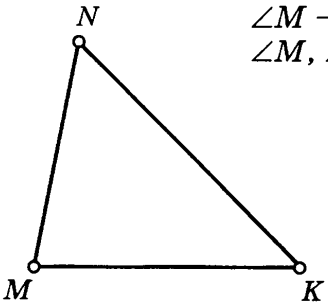


2

$\angle M = 2\angle K$

$\angle M - \angle N = 20°$

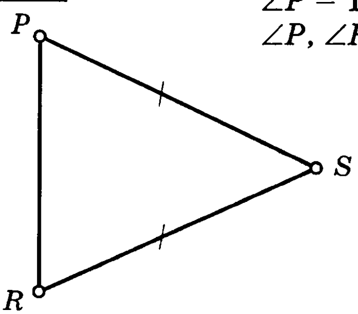
$\angle M, \angle N, \angle K$ — ?



3

$\angle P = 1{,}5\angle S$

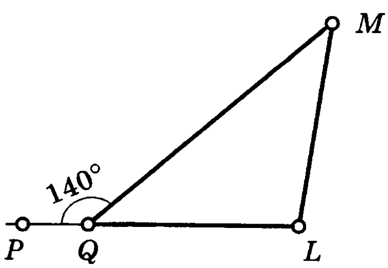
$\angle P, \angle R, \angle S$ — ?



4

$\angle Q = 0{,}4\angle L$

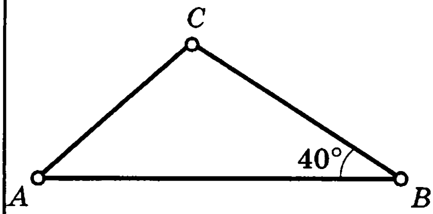
$\angle Q, \angle M, \angle L$ — ?



5

$\angle A : \angle C = 2 : 5$

$\angle A, \angle C$ — ?

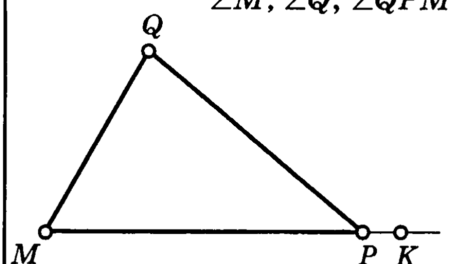


6

$\angle QPK = 3{,}5\angle QPM$

$\angle M : \angle Q = 3 : 4$

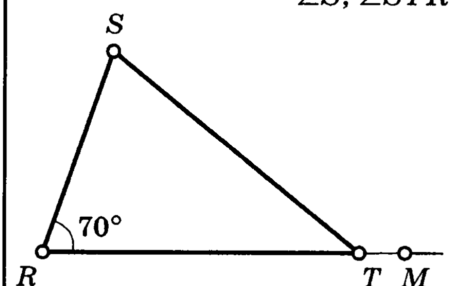
$\angle M, \angle Q, \angle QPM$ — ?



7

$\angle STM = 2\angle S$

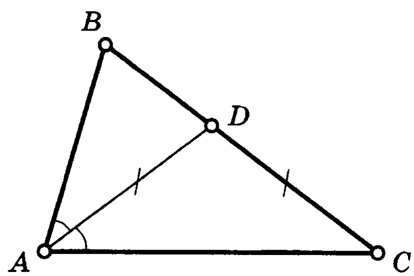
$\angle S, \angle STR$ — ?



8

$\angle B = 2\angle C$

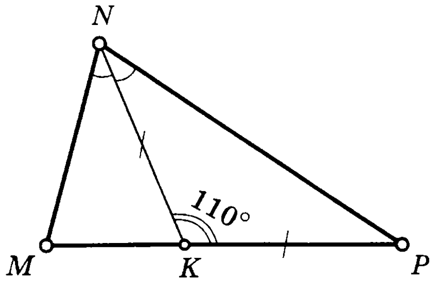
$\angle BAC, \angle B, \angle C$ — ?



Окончание табл. 8

9

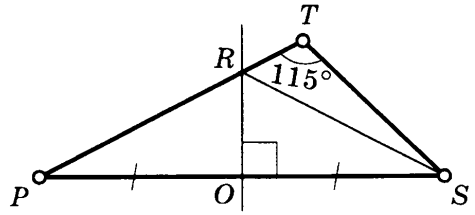
$\angle M$, $\angle MNP$, $\angle P$ — ?



10

$\angle TSR : \angle RSP = 3 : 5$

$\angle P$, $\angle TSP$ — ?

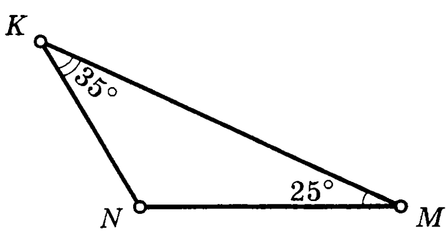


УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

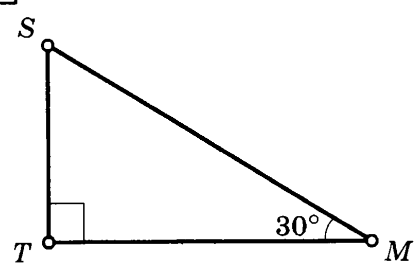
Таблица 9

Найдите все неизвестные углы треугольника.

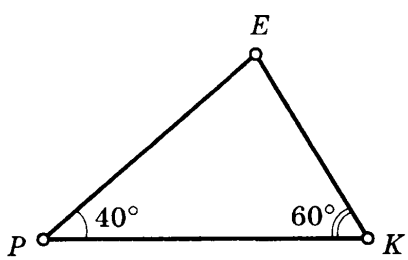
1



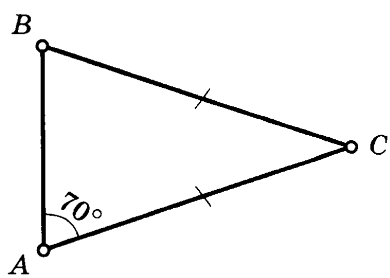
3



2

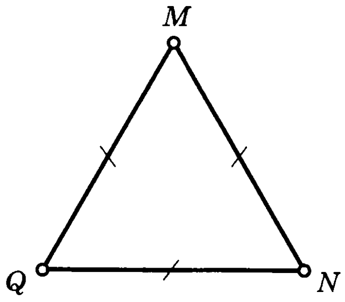


4

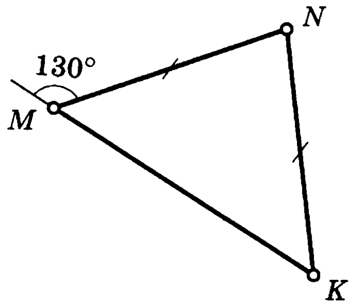


Продолжение табл. 9

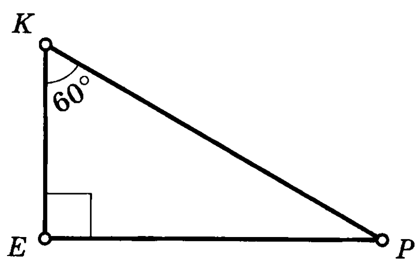
5



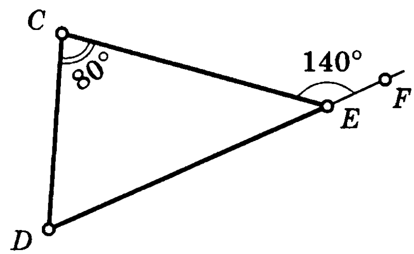
9



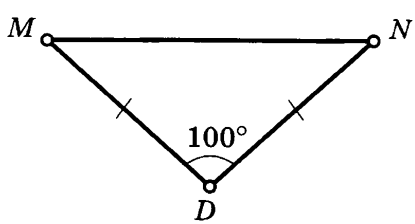
6



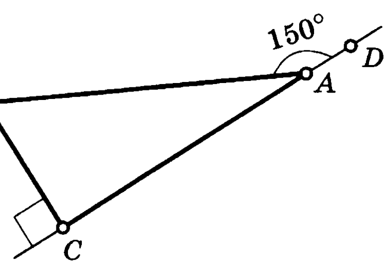
10



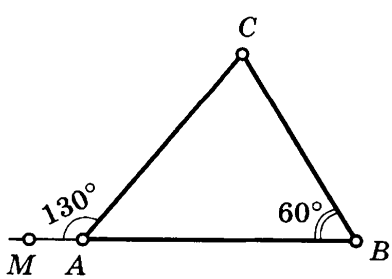
7



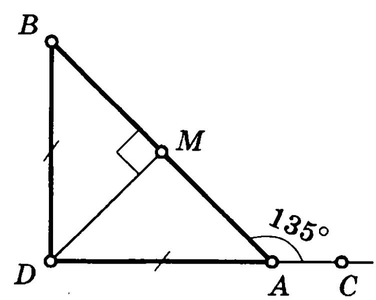
11



8

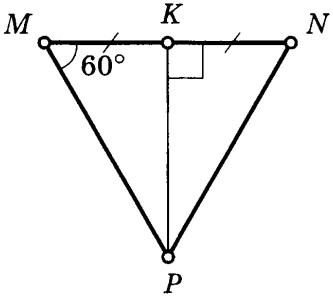


12

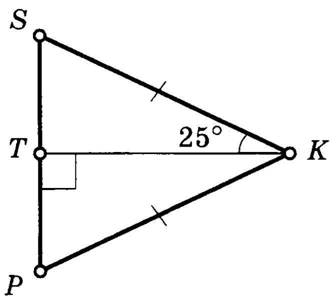


Продолжение табл. 9

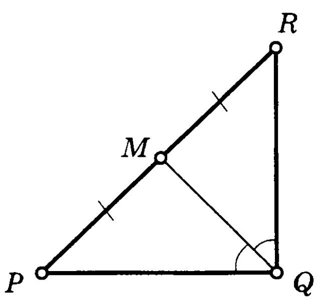
13



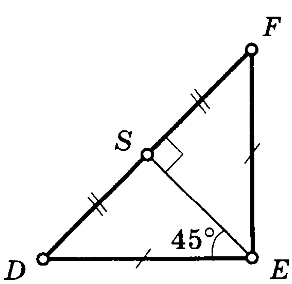
14



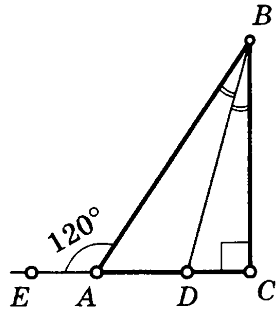
15



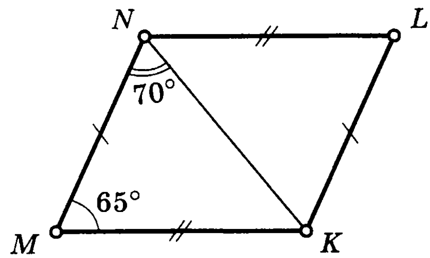
16



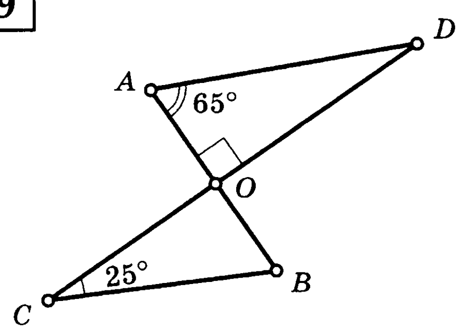
17



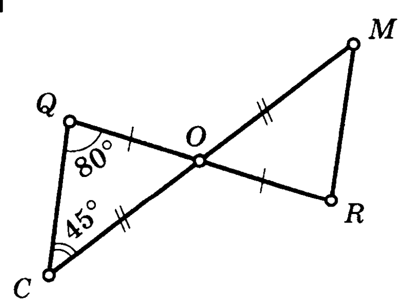
18



19

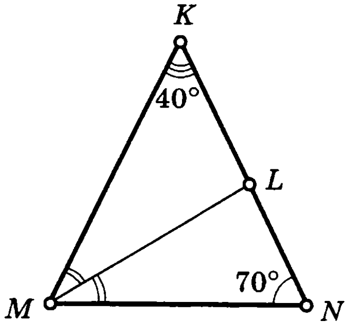


20

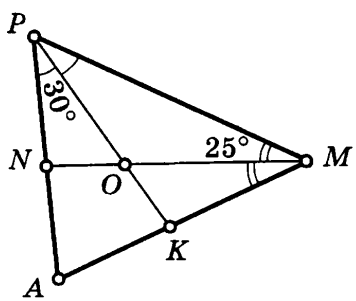


Продолжение табл. 9

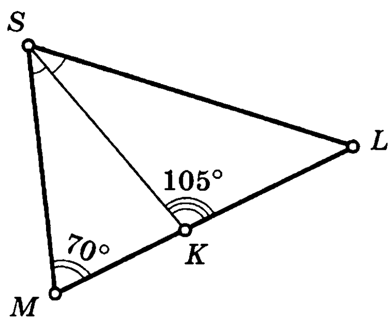
21



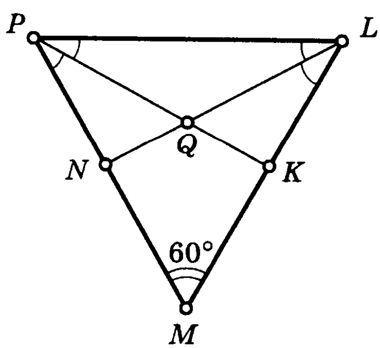
22



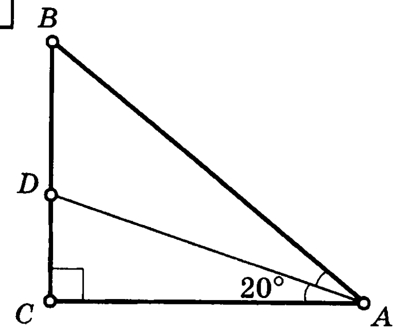
23



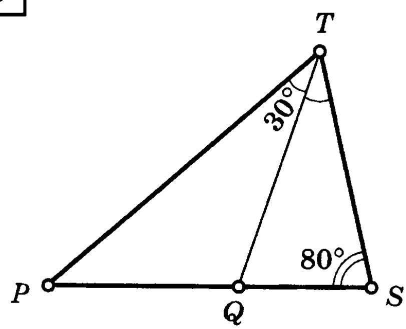
24



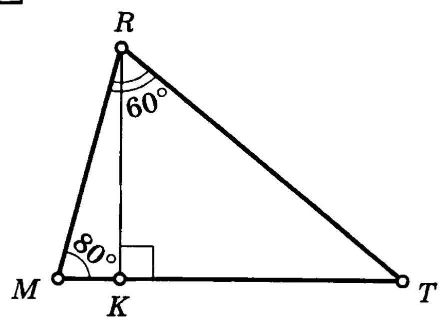
25



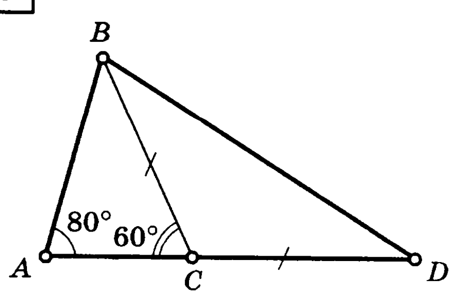
26



27

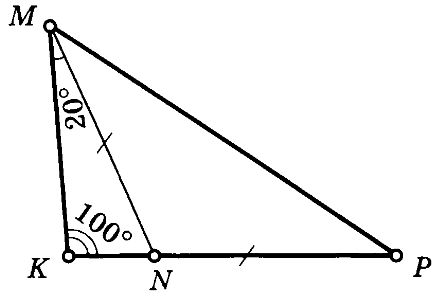


28



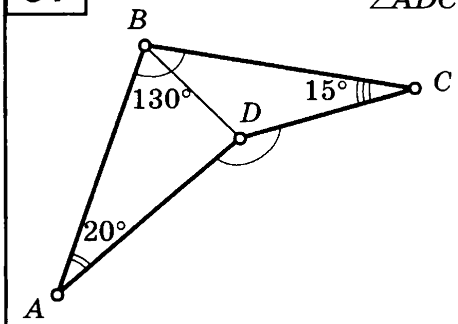
Окончание табл. 9

29

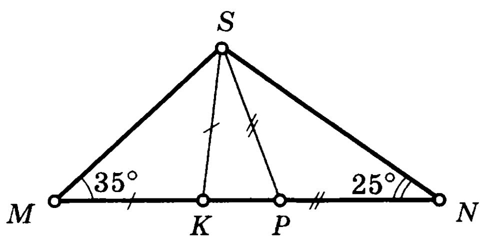


31

$\angle ADC$ — ?

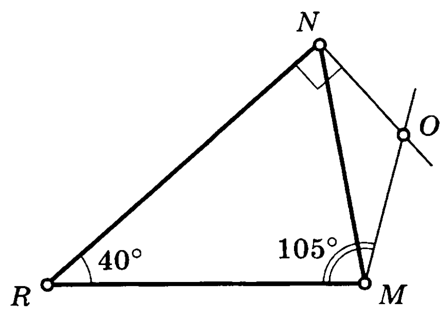


30



32

$\angle MON$ — ?

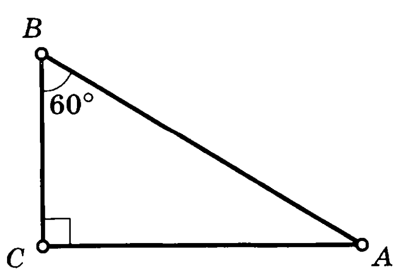


НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 10

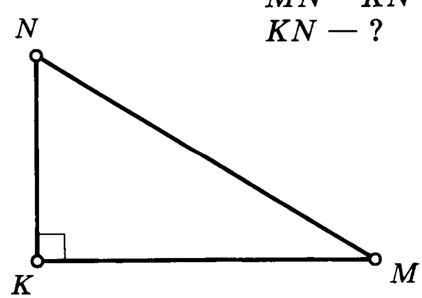
1

$AB + BC = 12$
AB, BC — ?



2

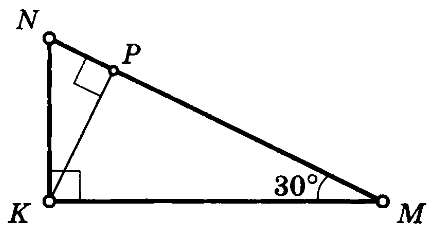
$\angle N = 2\angle M$
$MN - KN = 15$
KN — ?



Продолжение табл. 10

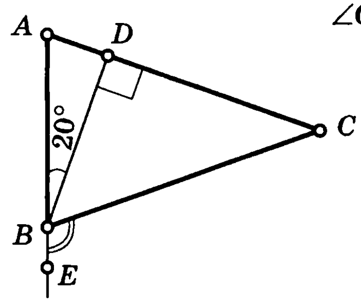
3

$MN = 36$
$MP,\ PN$ — ?



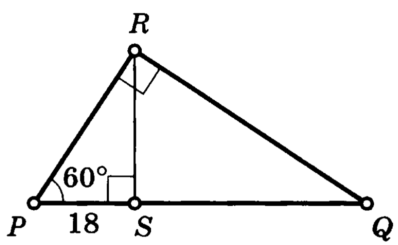
7

$AC = BC$
$\angle CBE$ — ?



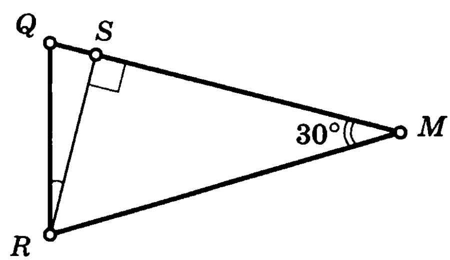
4

QS — ?



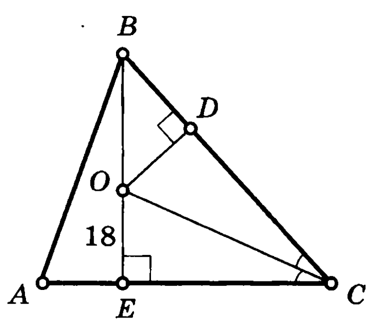
8

$\angle QRS$ — ?



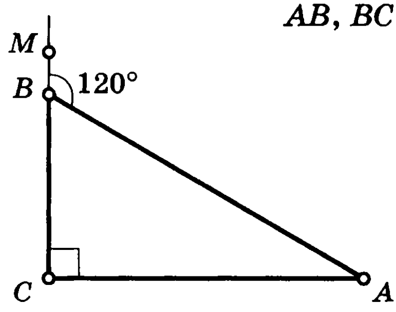
5

OD — ?



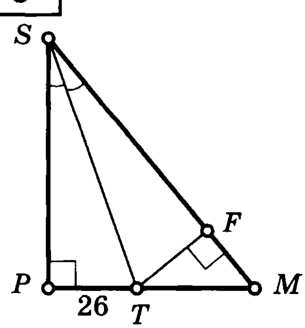
9

$BC + AB = 36$
$AB,\ BC$ — ?



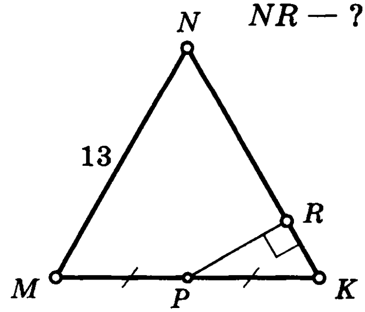
6

TF — ?



10

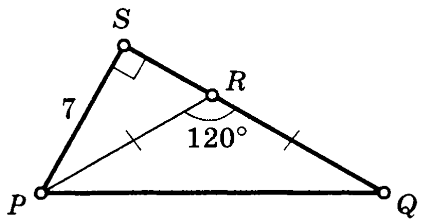
$MN = NK = MK$
NR — ?



Продолжение табл. 10

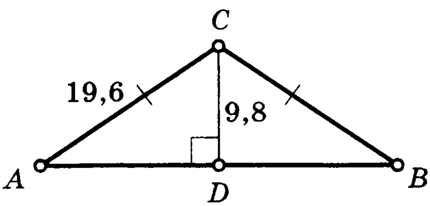
11

$PR = RQ$
PQ — ?



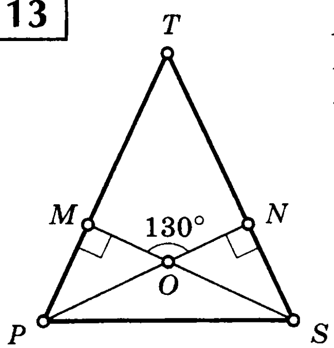
12

$\angle A$, $\angle B$, $\angle ACB$ — ?



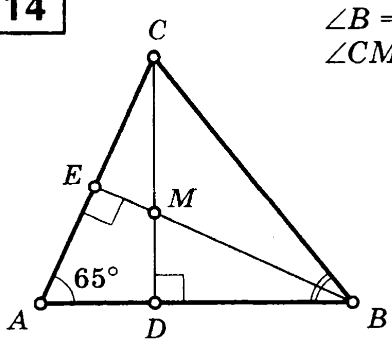
13

$PT = TS$
$\angle T$, $\angle TPS$,
$\angle TSP$ — ?



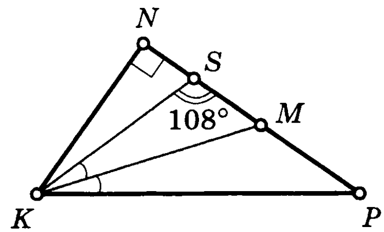
14

$\angle B = 53°$
$\angle CMB$ — ?



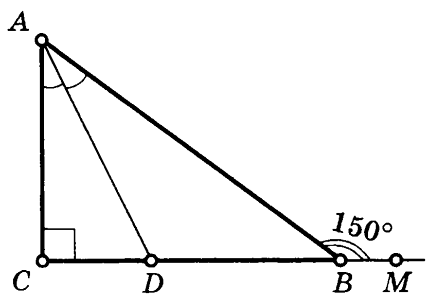
15

$\angle KNM$, $\angle NKM$,
$\angle KMN$ — ?



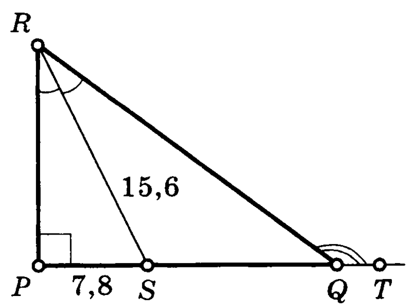
16

CB, CD — ?



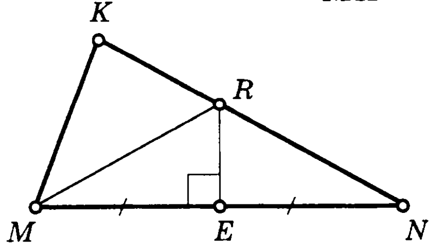
17

SQ, $\angle RQT$ — ?



18

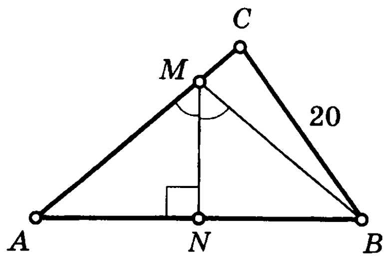
$KN = 26$
$P_{\Delta MKR} = 32$
MK — ?



Окончание табл. 10

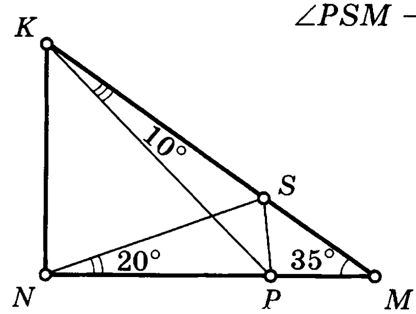
19

$AC = 24$
$P_{\Delta MCB}$ — ?



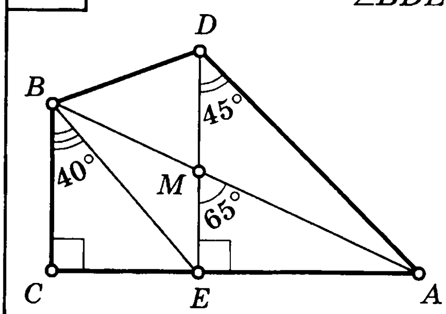
20

$\angle KNM = 90°$
$\angle PSM$ — ?



21

$\angle BDE$ — ?

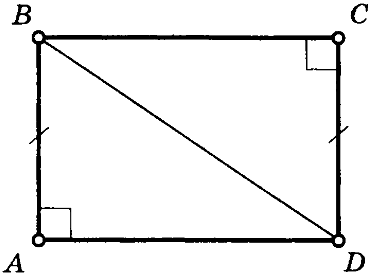


ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

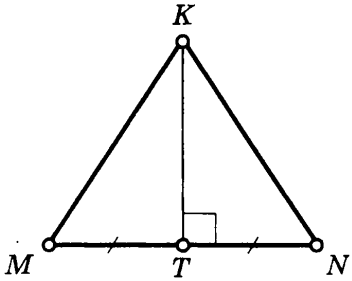
Таблица 11

Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

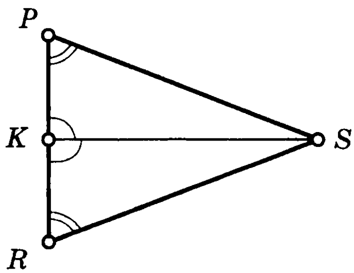
1



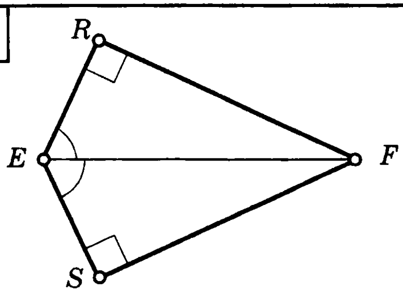
2



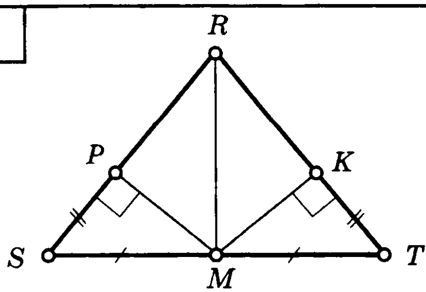
3



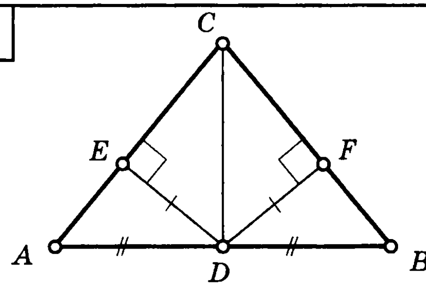
4



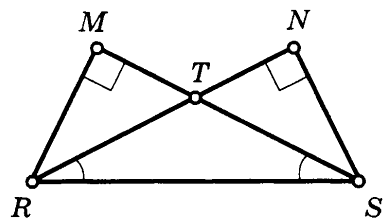
5



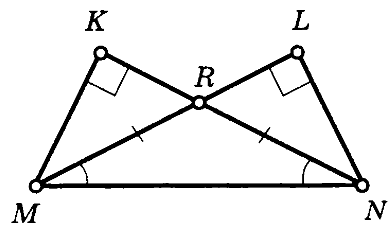
6



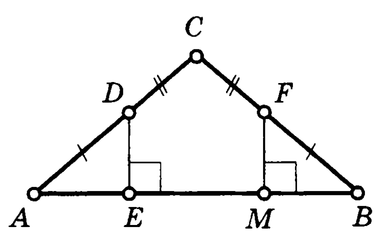
7



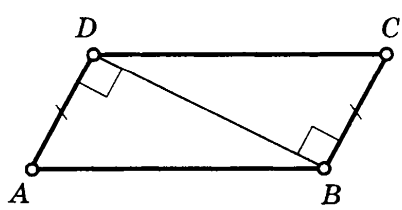
8



9



10

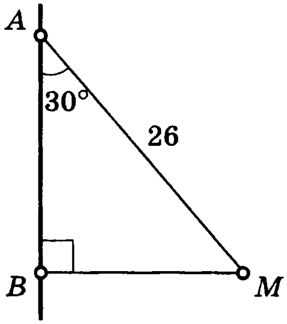


РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

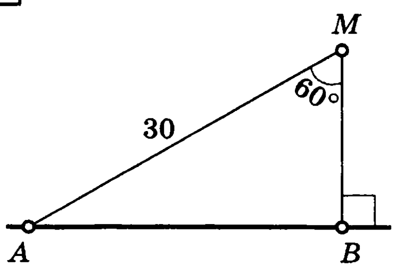
Таблица 12

Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

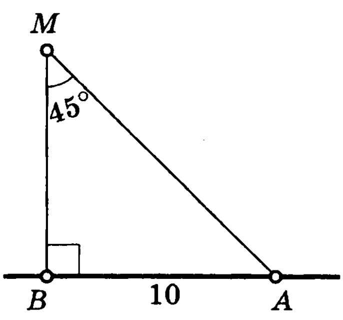
1



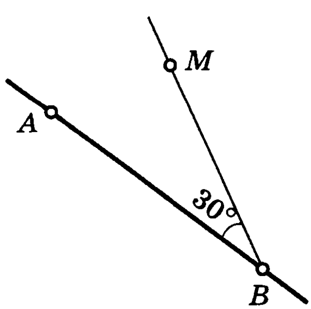
2



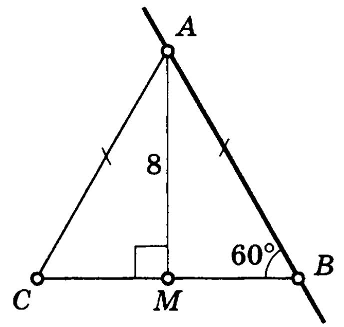
3



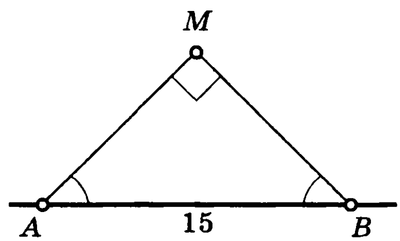
4



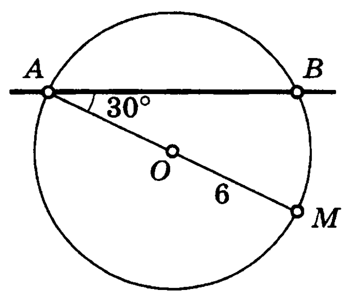
5



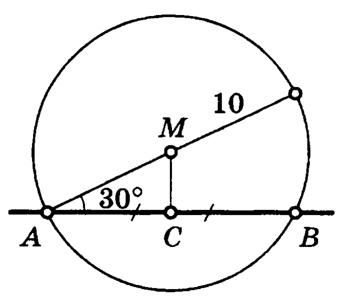
6



7

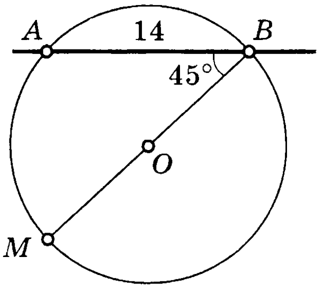


8



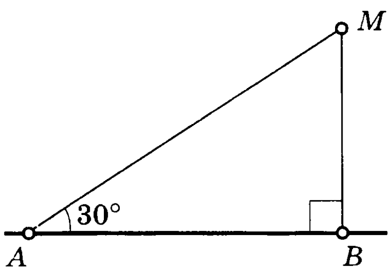
Окончание табл. 12

9



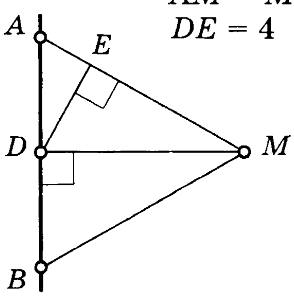
10

$AM - MB = 7$

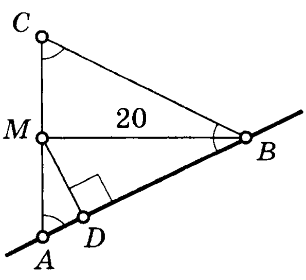


11

$AM = MB = AB$
$DE = 4$

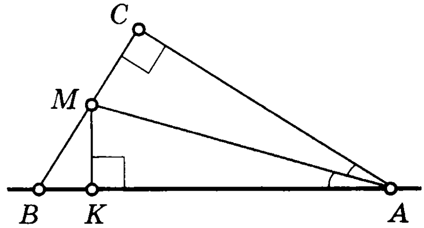


12



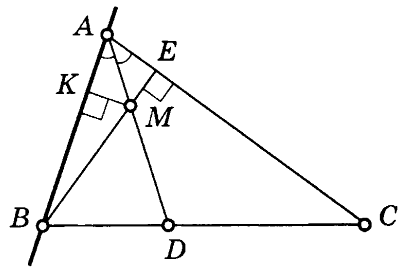
13

$MC = 13$

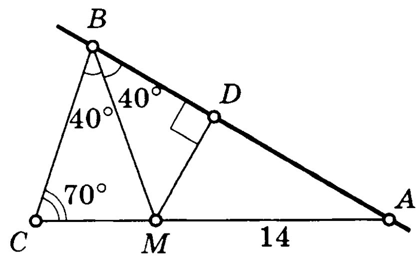


14

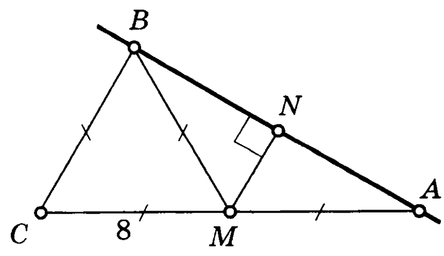
$ME = 13$



15



16



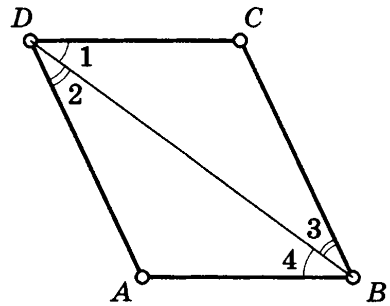
VIII класс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

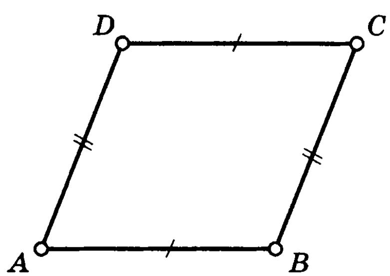
Таблица 1

Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

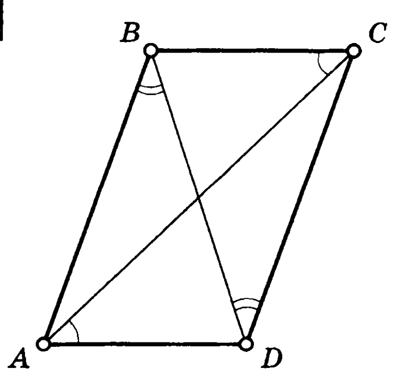
1



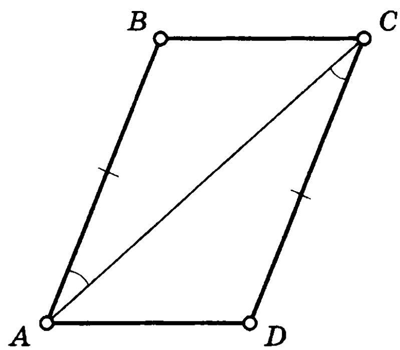
2



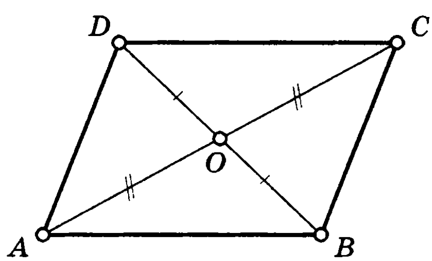
3



4

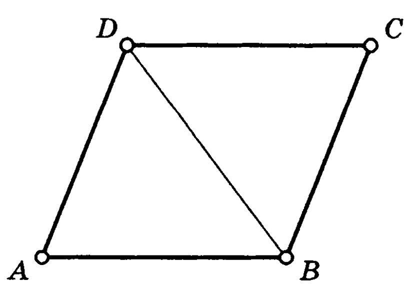


5



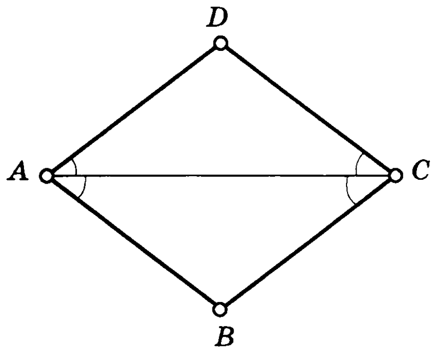
6

$\Delta ABD = \Delta CDB$

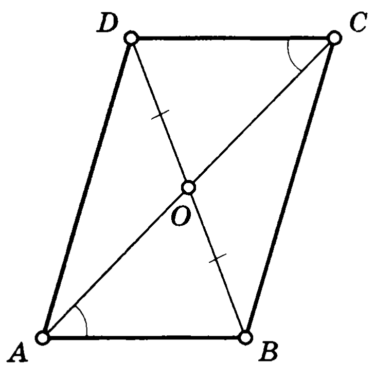


Окончание табл. 1

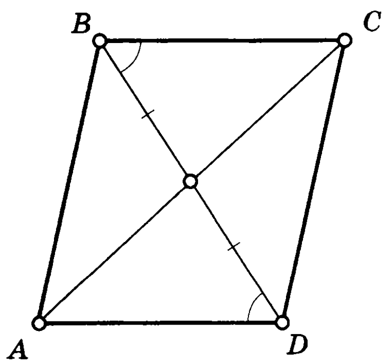
7



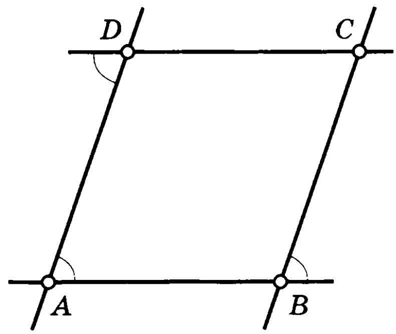
8



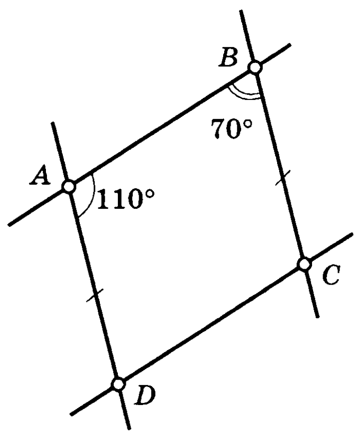
9



10

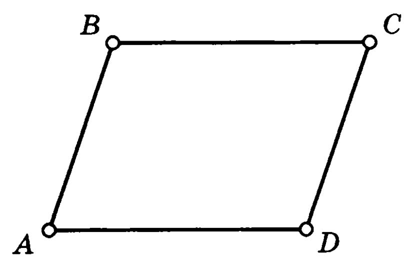


11



12

$\angle A + \angle D = 180^\circ$
$BC \parallel AD$

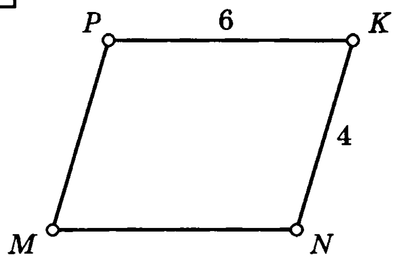


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

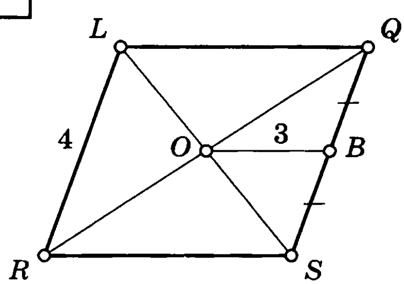
Таблица 2

Найдите периметр параллелограмма.

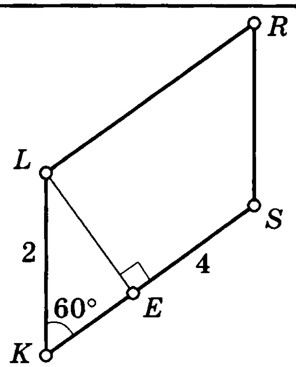
1



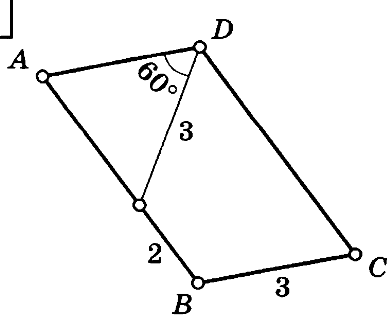
2



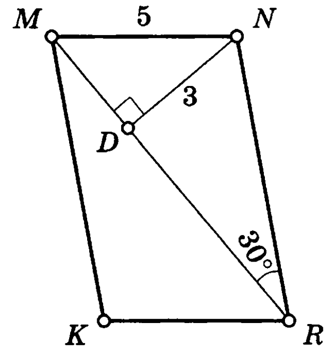
3



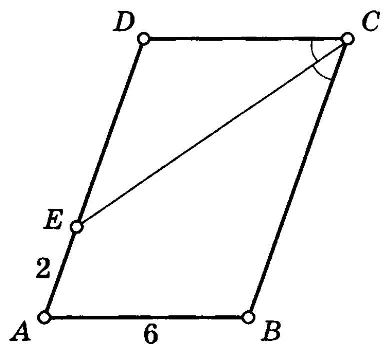
4



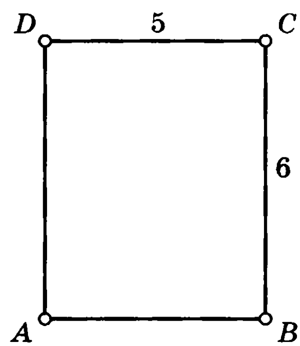
5



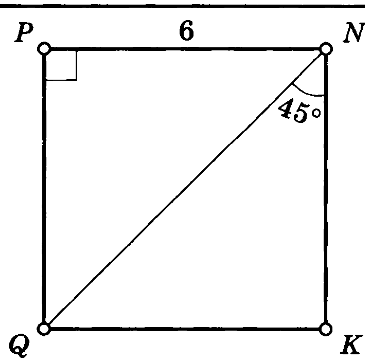
6



7

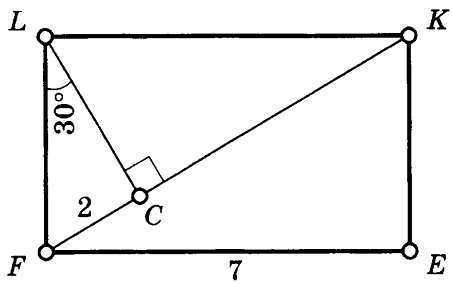


8

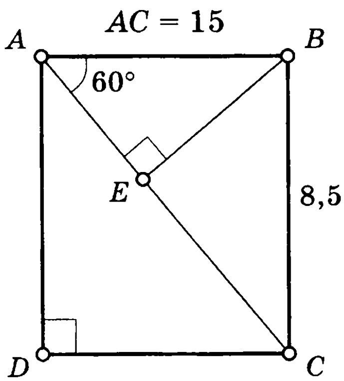


Продолжение табл. 2

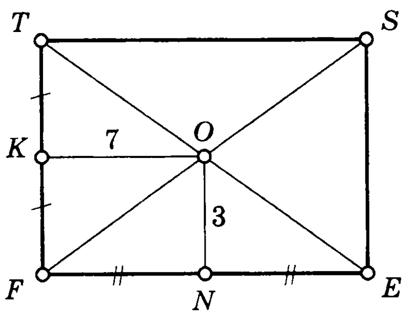
9



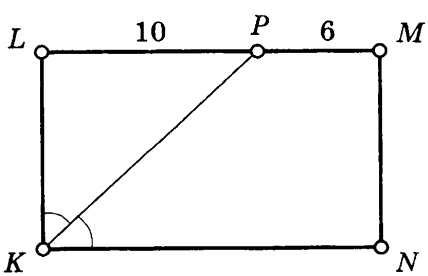
10



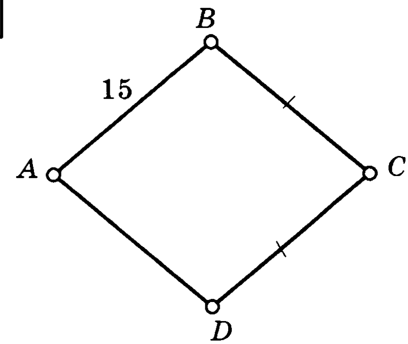
11



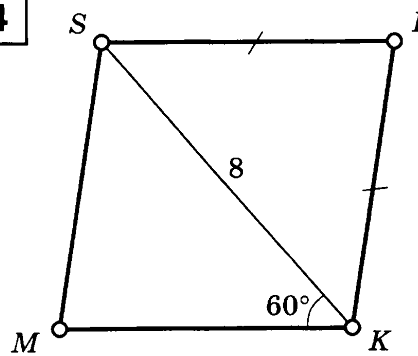
12



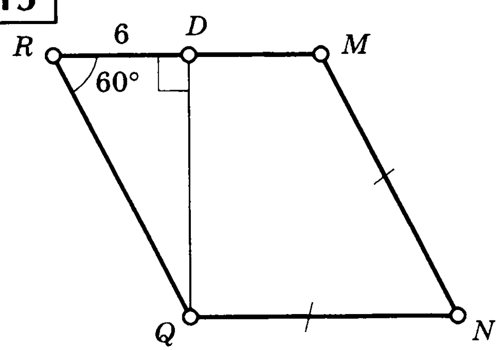
13



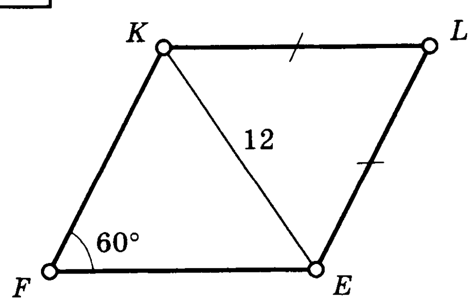
14



15

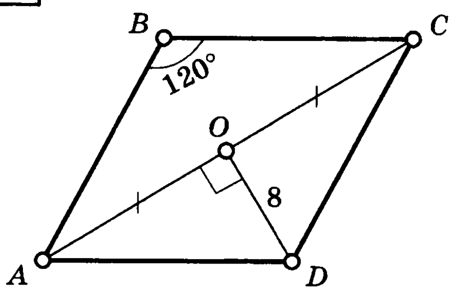


16

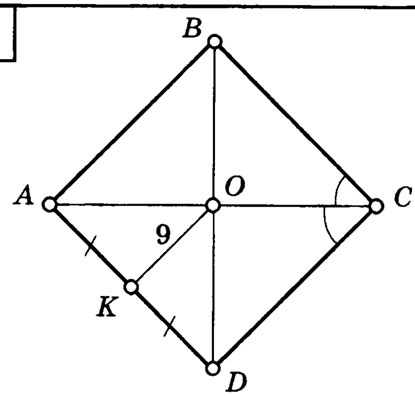


Окончание табл. 2

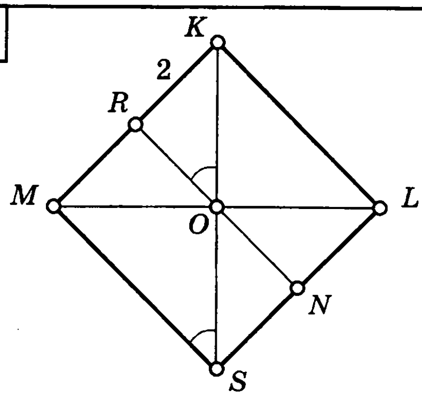
17



21

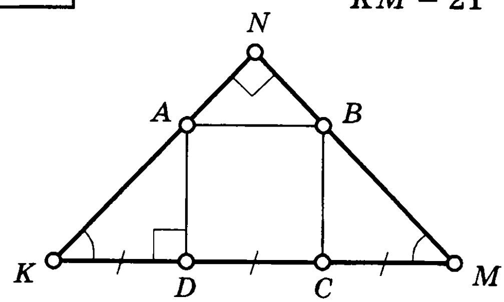


18

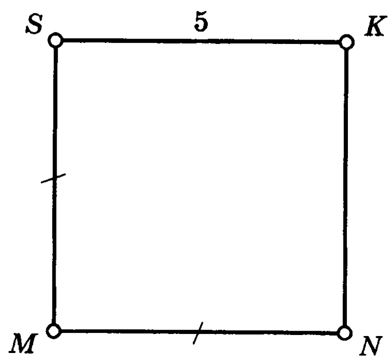


22

$KM = 21$

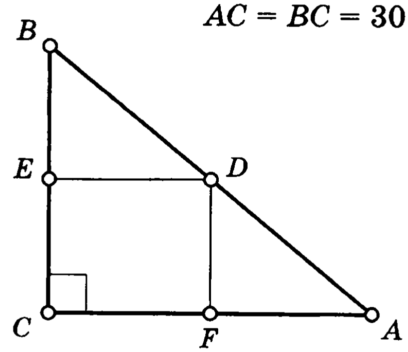


19

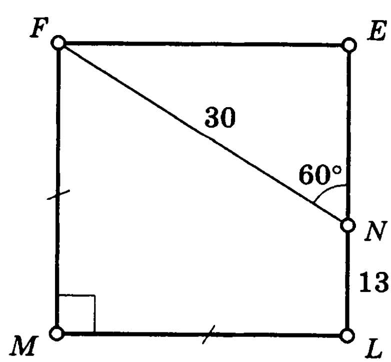


23

$AC = BC = 30$

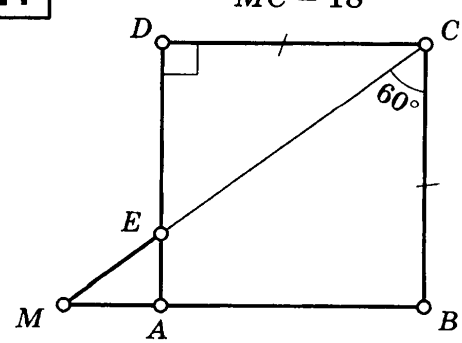


20



24

$MC = 18$

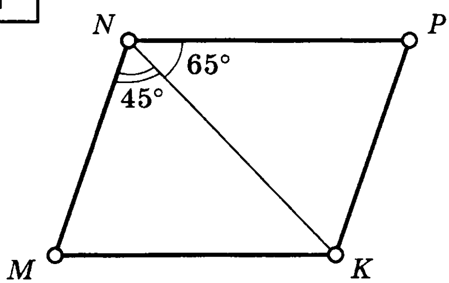


СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

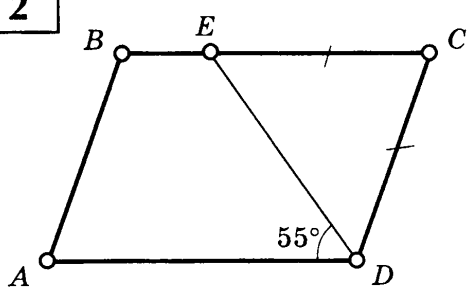
Таблица 3

Найдите неизвестные углы.

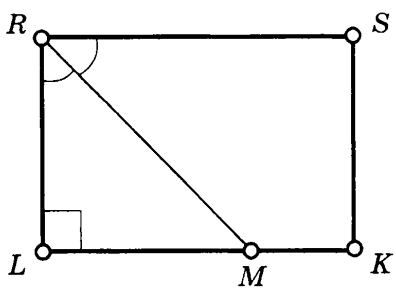
1



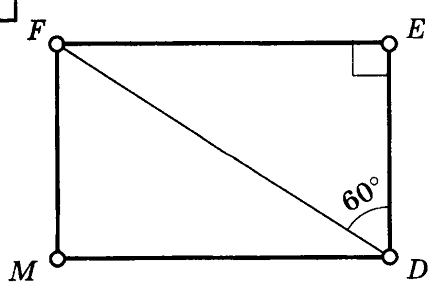
2



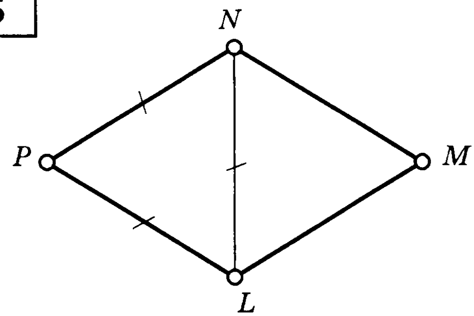
3



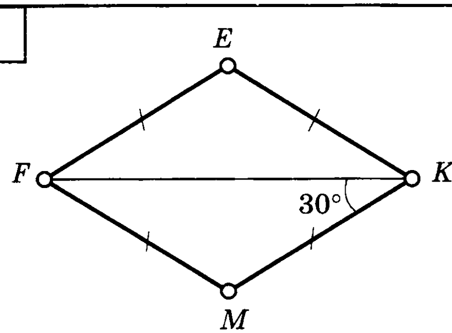
4



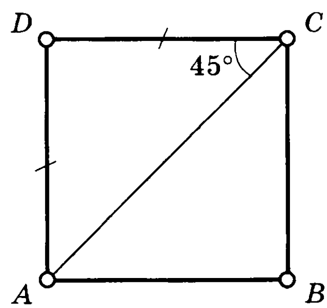
5



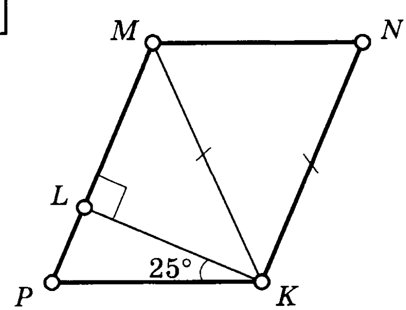
6



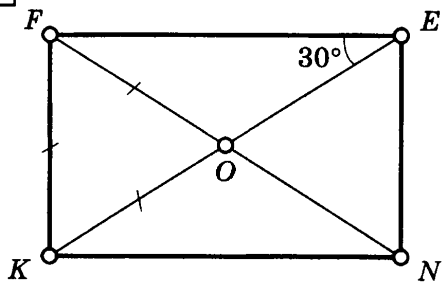
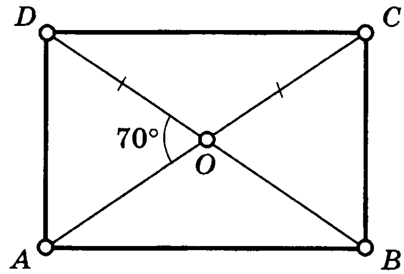
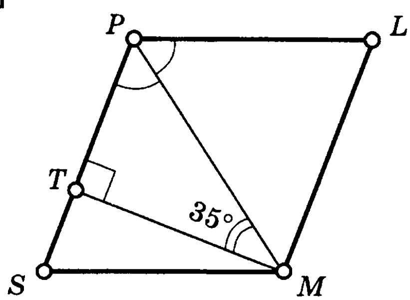
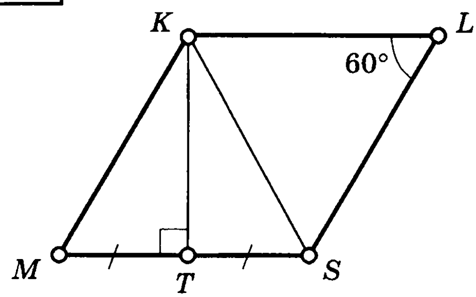
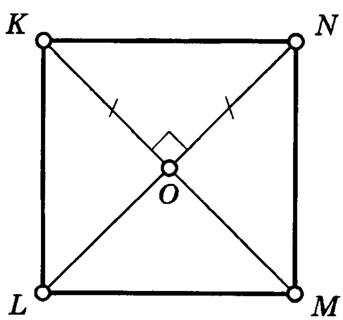
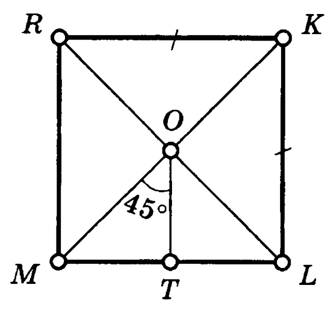
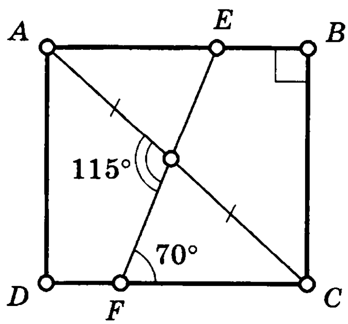
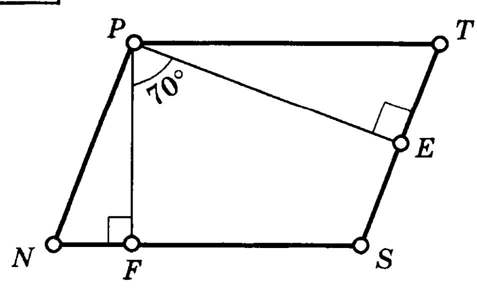
7



8

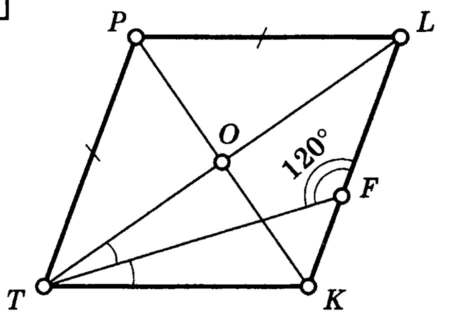


Продолжение табл. 3

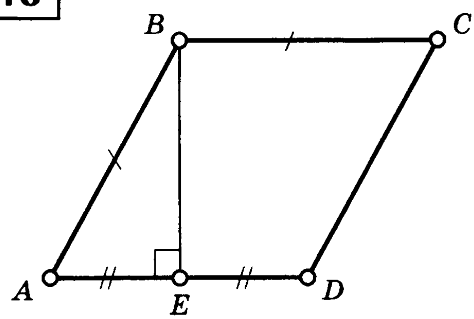
9 	**13** 
10 	**14** 
11 	**15** 
12 	**16** 

Окончание табл. 3

17



18



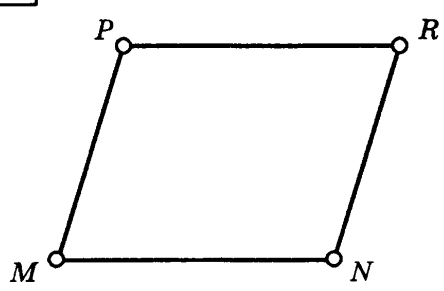
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Таблица 4

Найдите углы параллелограмма.

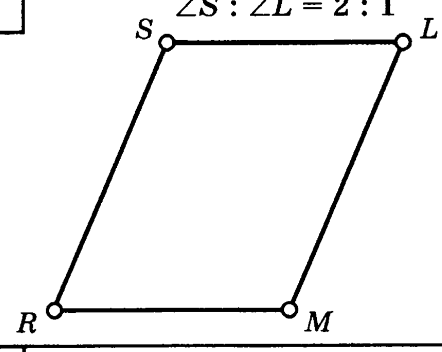
1

$\angle M + \angle R = 140°$



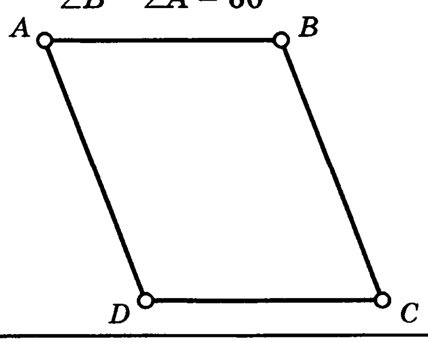
3

$\angle S : \angle L = 2 : 1$

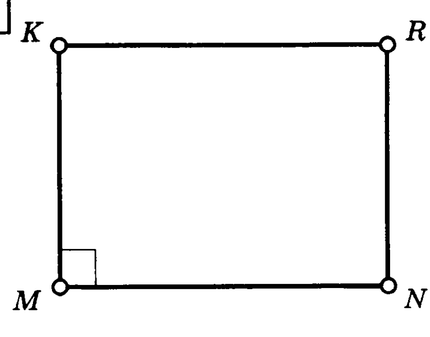


2

$\angle B - \angle A = 60°$



4

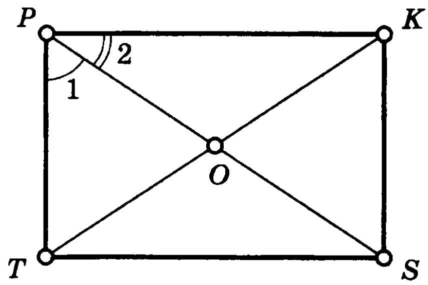


Окончание табл. 4

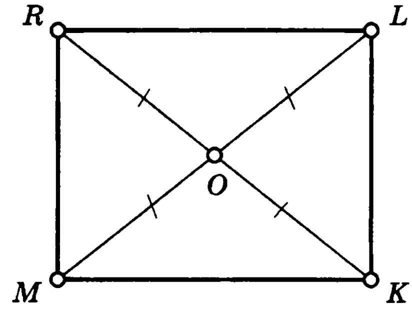
5

$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 1$

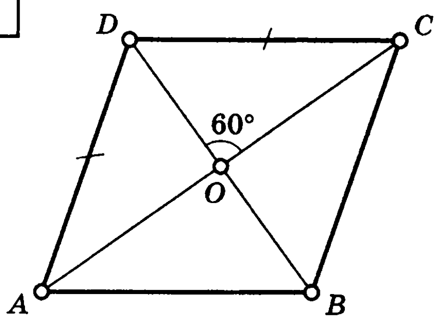
$\angle 1 - \angle 2 = 30°$



7

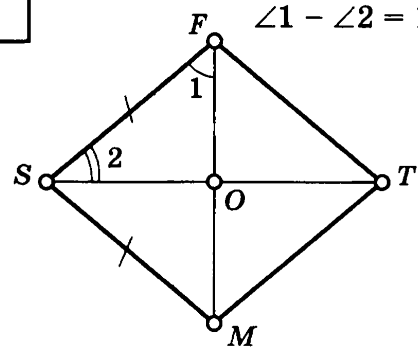


6



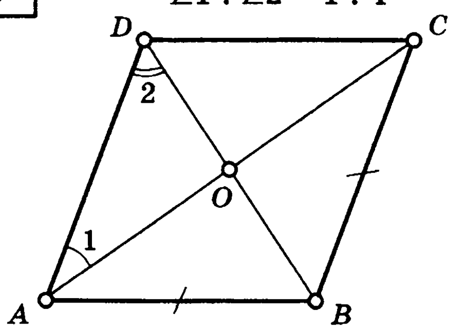
8

$\angle 1 - \angle 2 = 10°$



9

$\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$

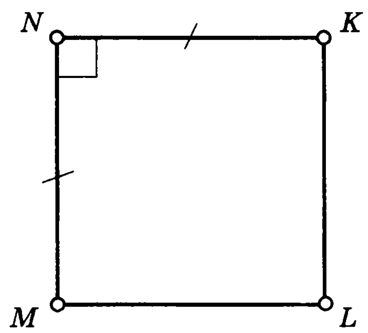


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

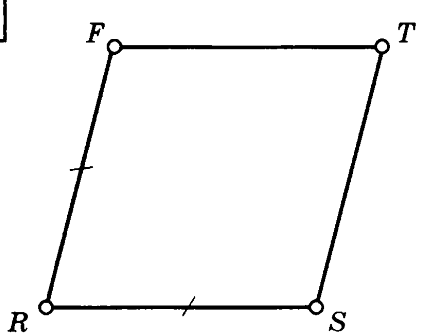
Таблица 5

Найдите стороны параллелограмма, если $P = 36$.

1

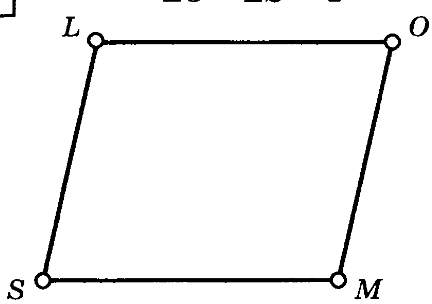


2



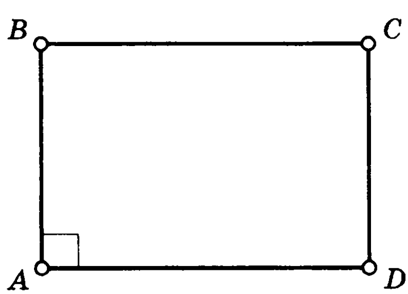
3

$LO - LS = 1$

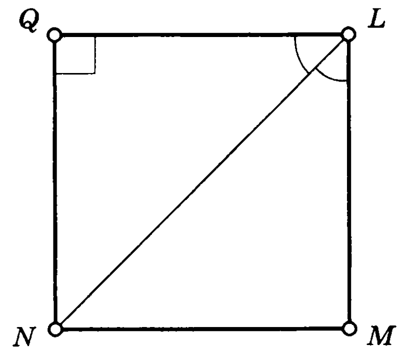


4

$AB : BC = 2 : 3$

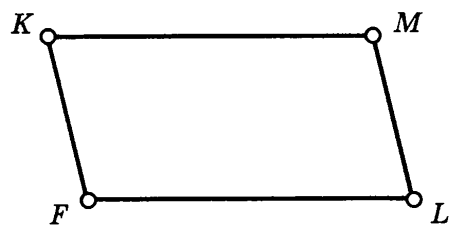


5



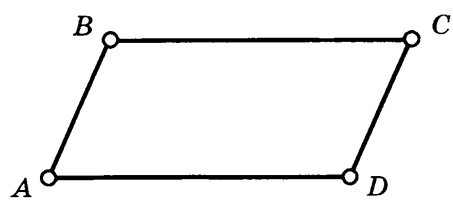
6

$KM = 2\ KF$

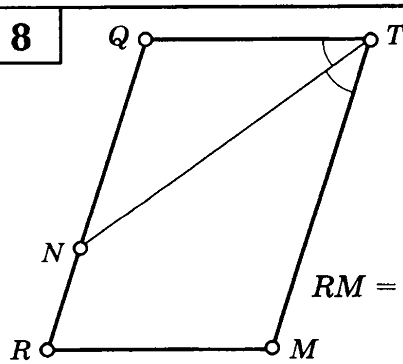


7

$AB : BC = 1 : 2$



8

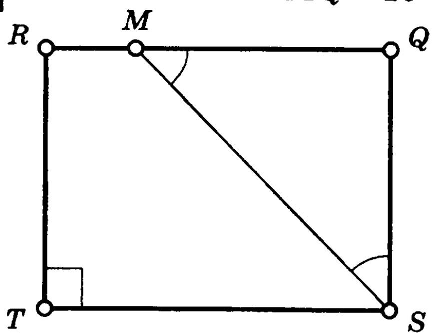


$RM = 1{,}5\ RN$

Окончание табл. 5

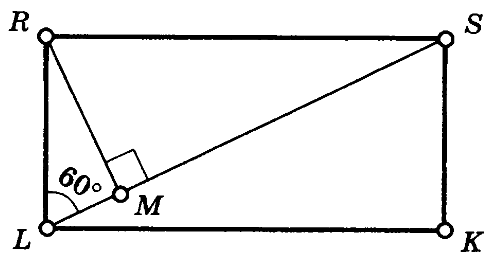
9

$RM + MQ = 10$



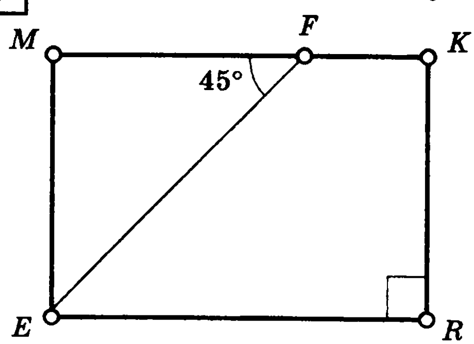
11

$LM = 2$

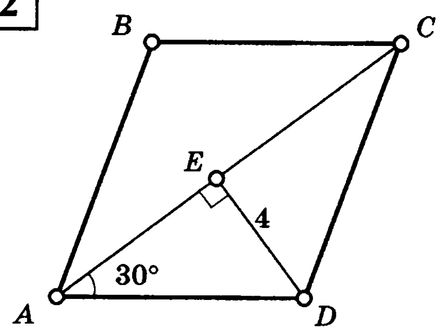


10

$MF - FK = 6$



12

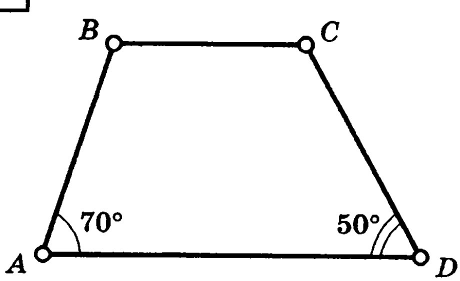


ТРАПЕЦИЯ

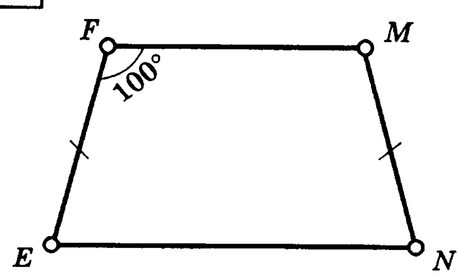
Таблица 6

Найдите углы трапеции.

1

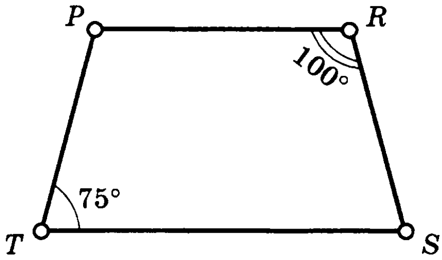


2

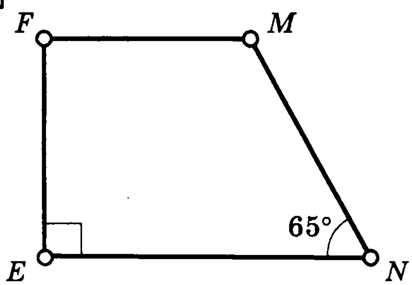


Продолжение табл. 6

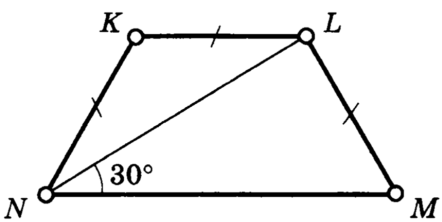
3



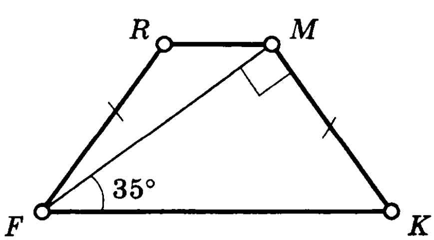
4



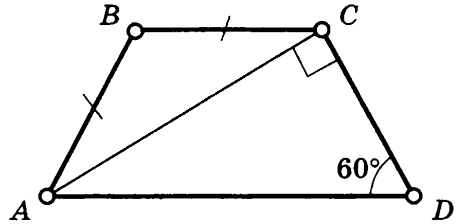
5



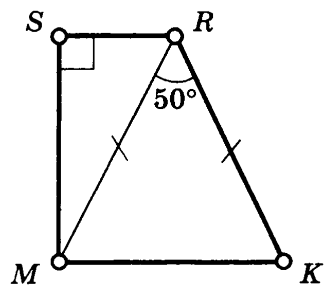
6



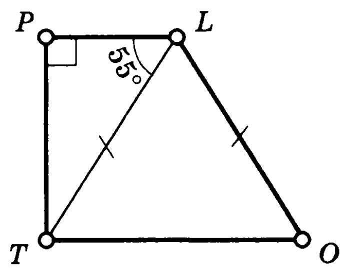
7



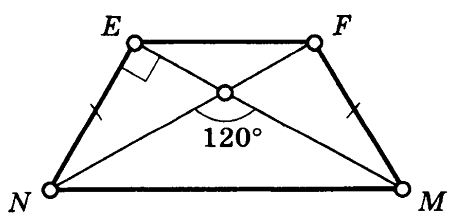
8



9

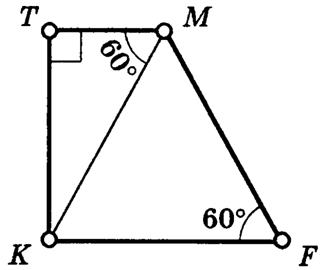


10

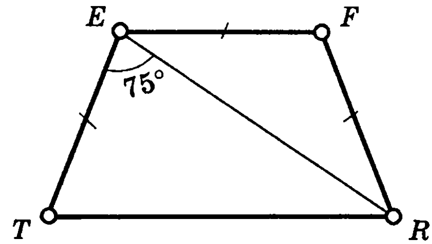


Окончание табл. 6

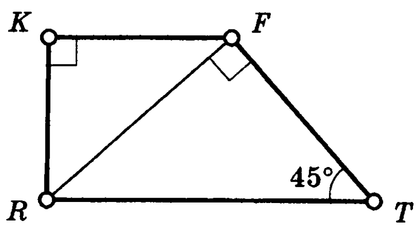
11



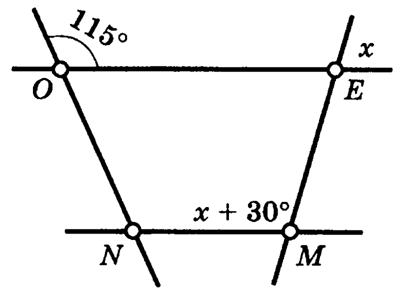
15



12

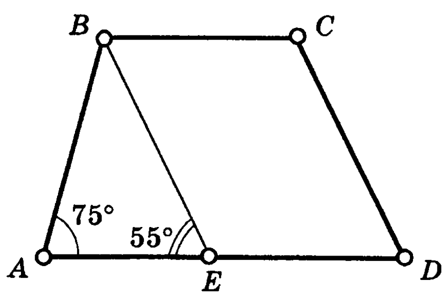


16

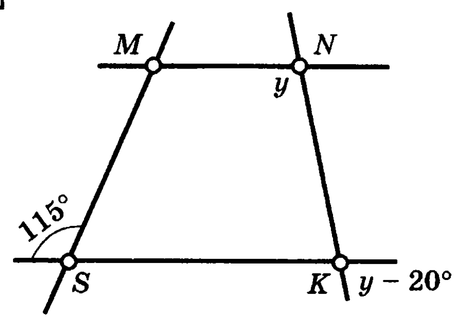


13

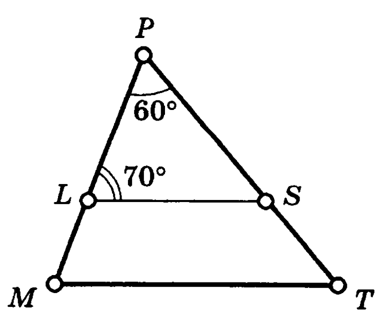
$BE \parallel CD$



17



14



18

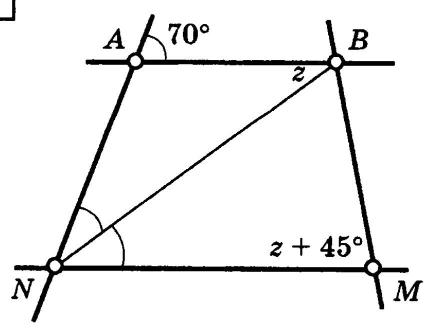
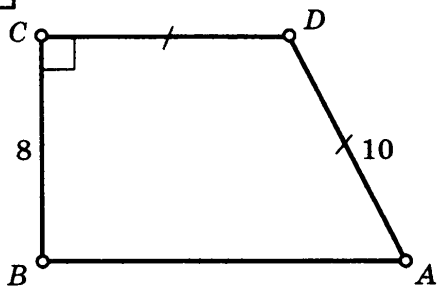


Таблица 7

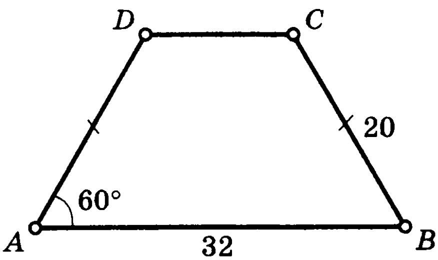
ТРАПЕЦИЯ

Найдите P_{ABCD}.

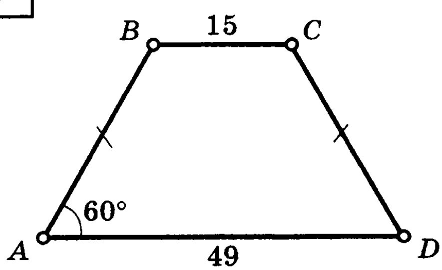
1



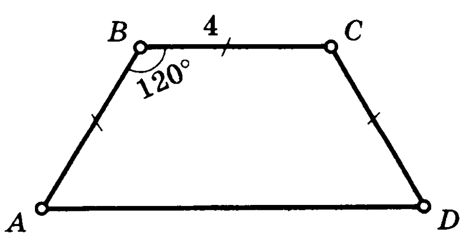
2



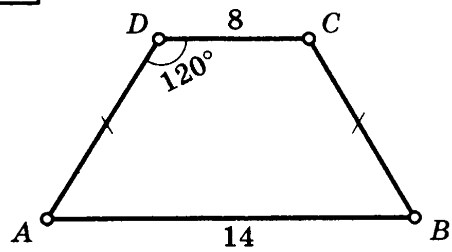
3



4

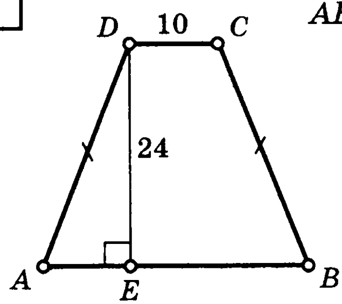


5



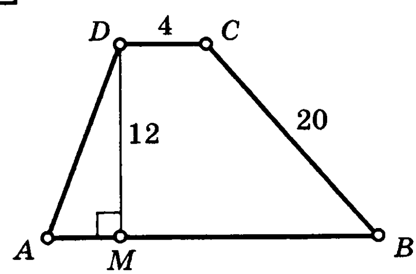
6

$AB = DE$



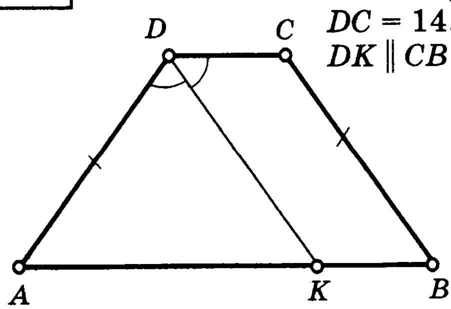
7

$AB = 25$



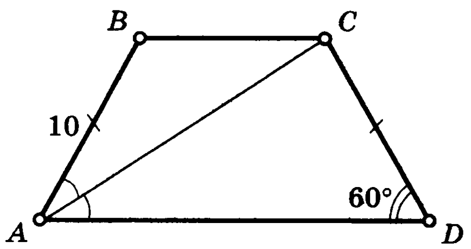
8

$AB = 27{,}65$
$DC = 14{,}15$
$DK \parallel CB$



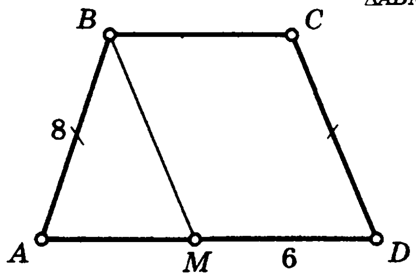
Окончание табл. 7

9



10

$BM \parallel CD$
$P_{\Delta ABM} = 20$

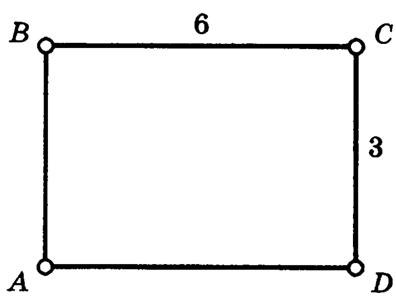


ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

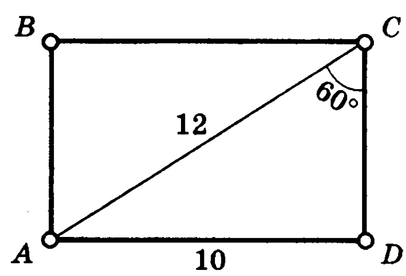
Таблица 8

Найдите S_{ABCD}.

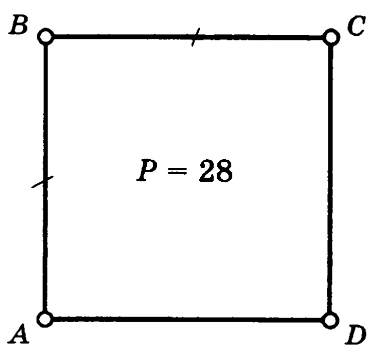
1



3

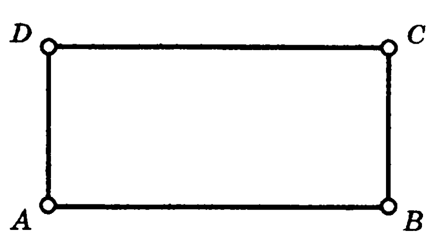


2



4

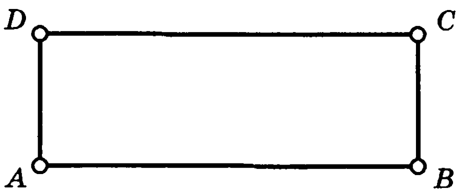
$AB = 3\ BC$
$AB - BC = 12$



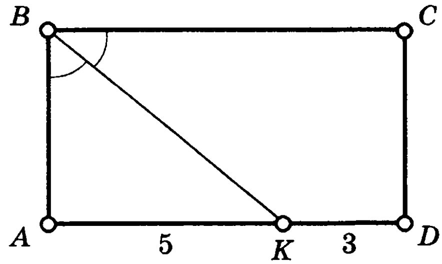
Продолжение табл. 8

5

$P = 30$
$AB = 4\ BC$

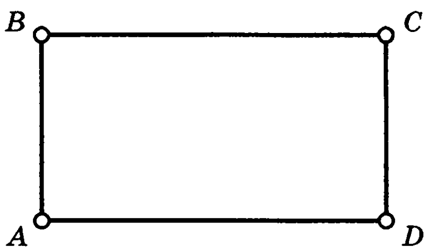


9



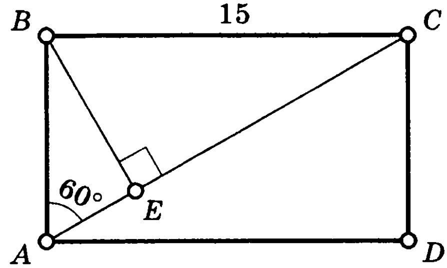
6

$P = 36$
$AD : DC = 2 : 1$



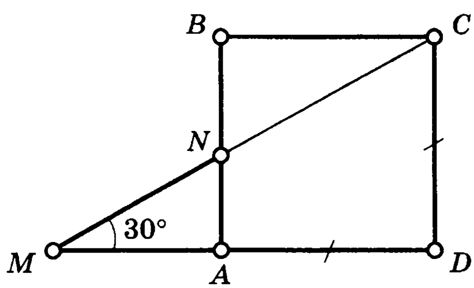
10

$AE = 2{,}5\sqrt{3}$

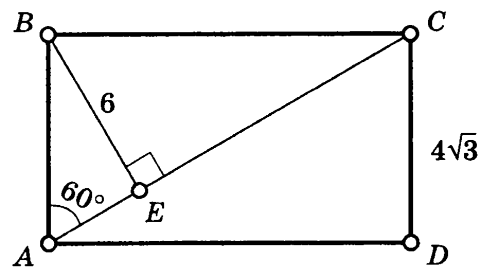


7

$MC = 20$

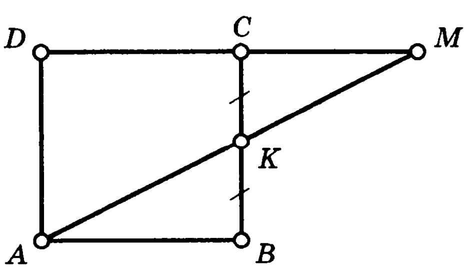


11



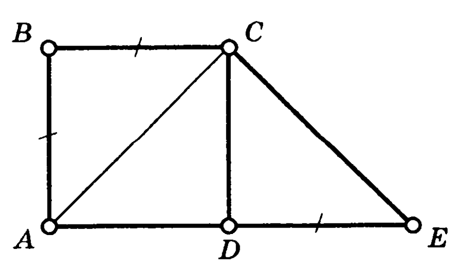
8

$S_{\Delta AMD} = 33$



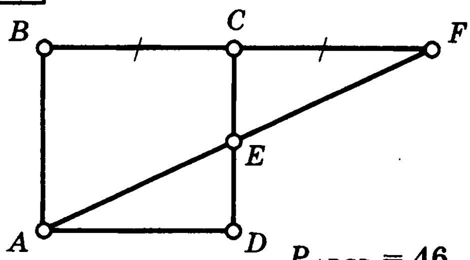
12

$S_{\Delta ACE} = 64$



Окончание табл. 8

13



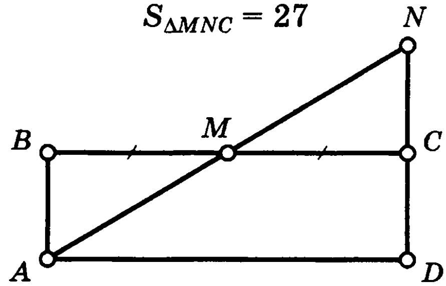
$P_{ABCD} = 46$

$BC - AB = 5$

14

$AD = 3\,AB$

$S_{\Delta MNC} = 27$

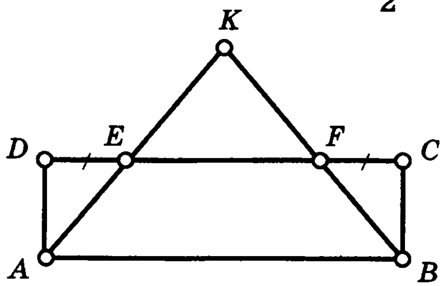


15

$S_{\Delta EKF} = 28$

$DC : AD = 7 : 4$

$DE = FC = \dfrac{1}{2}\,EF$

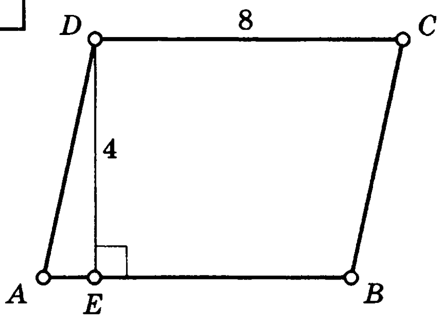


ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

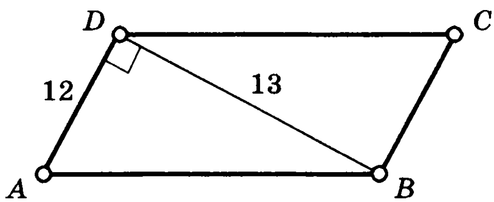
Таблица 9

Найдите S_{ABCD}.

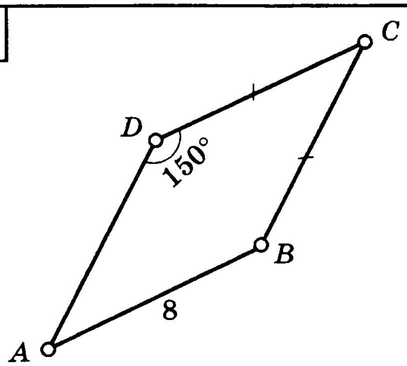
1



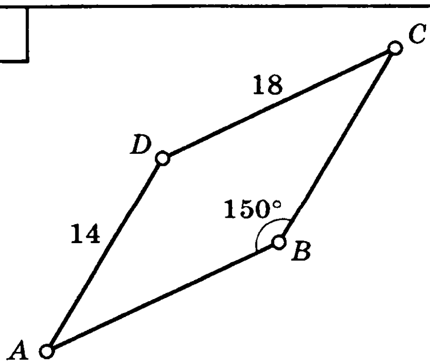
2



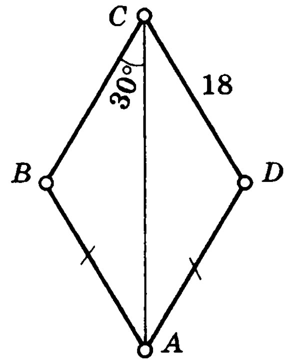
3



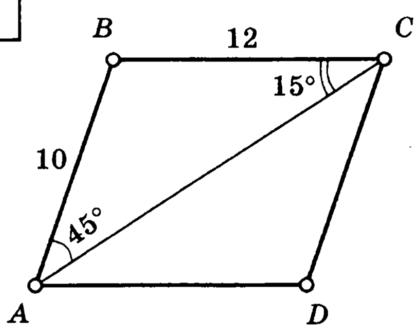
4



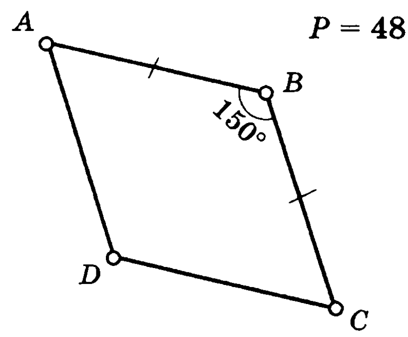
5



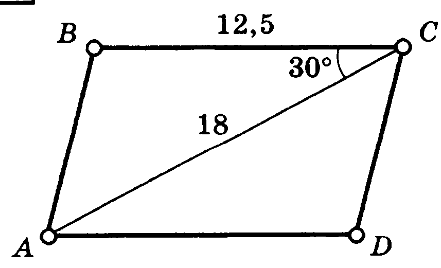
6



7



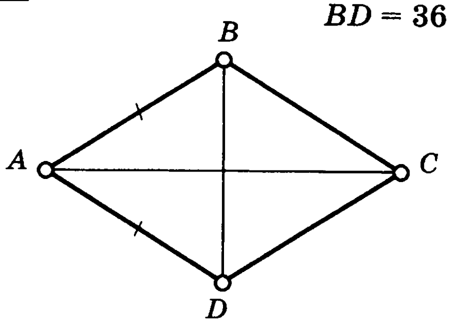
8



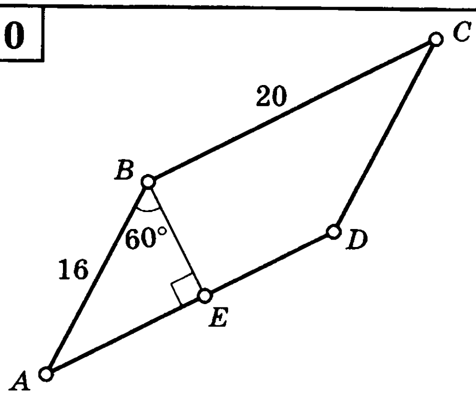
Продолжение табл. 9

9

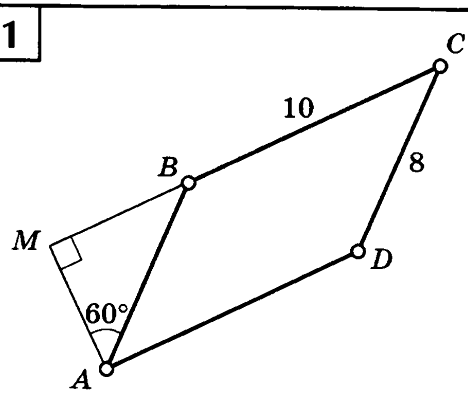
$AC = 48$
$BD = 36$



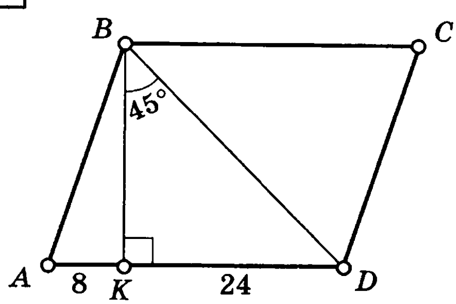
10



11

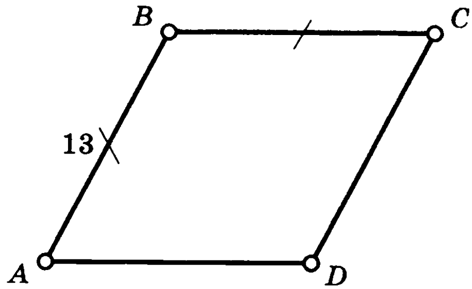


12

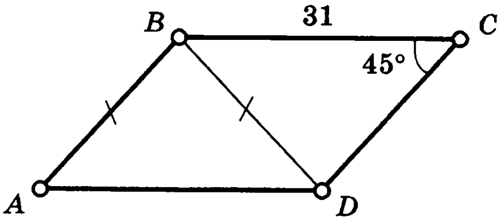


13

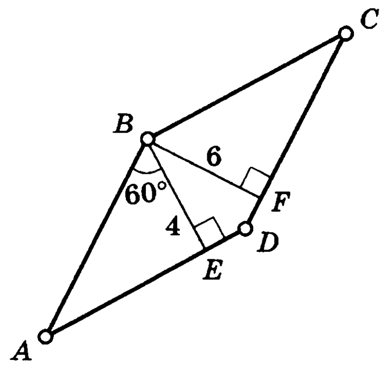
$\angle B = 2\angle A$



14

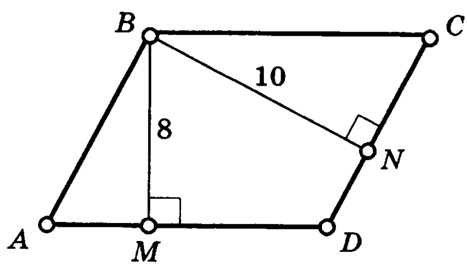


15



16

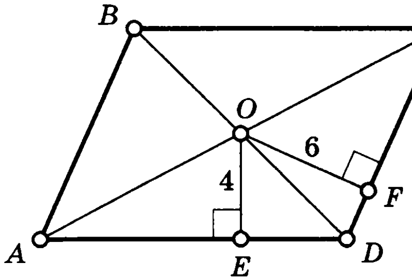
$P = 84$



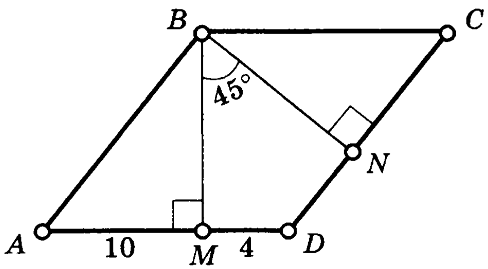
Окончание табл. 9

17

$P = 20$

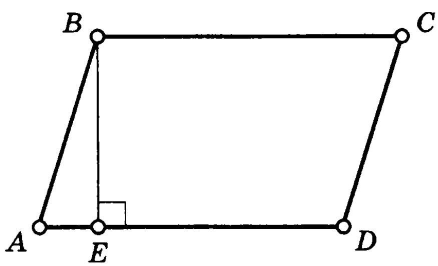


18



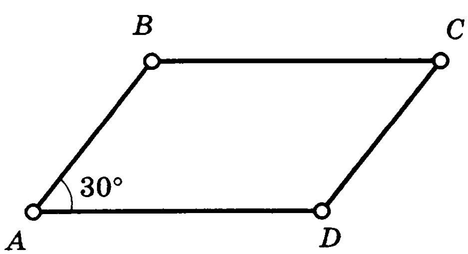
19

$BE : AD = 1 : 3$
$AD - BE = 8$



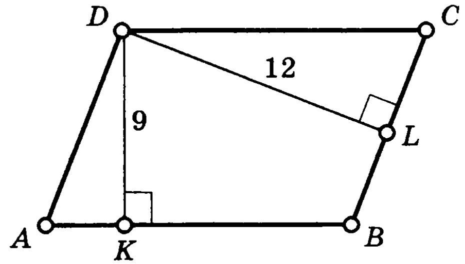
20

$P = 92$
$BC - AB = 4$



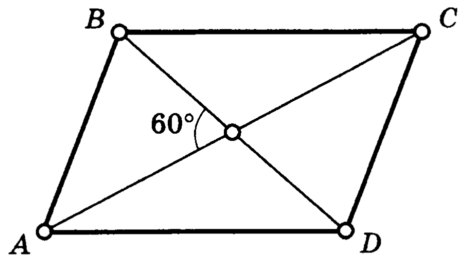
21

$AB - BC = 4$

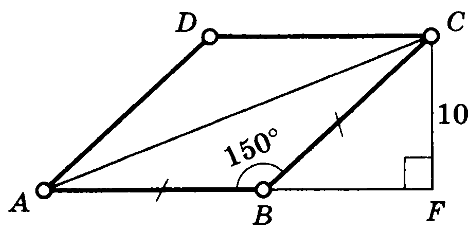


22

$BD = 12$
$AC = 16$

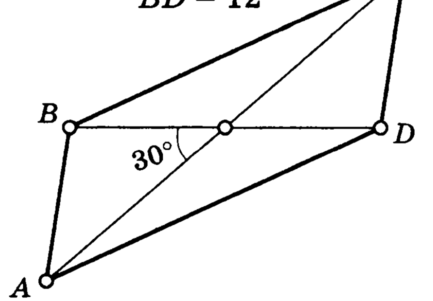


23



24

$AC = 16$
$BD = 12$

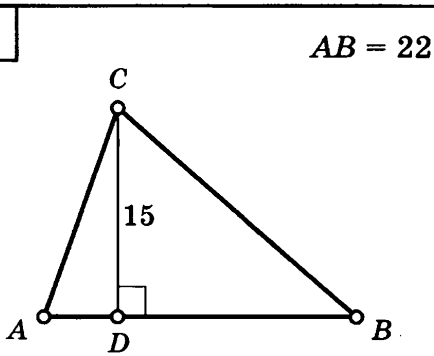


ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

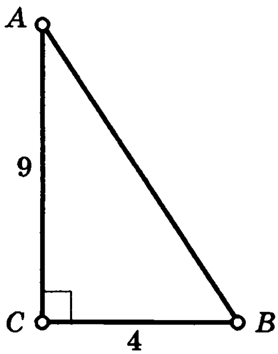
Таблица 10

Найдите $S_{\Delta ABC}$.

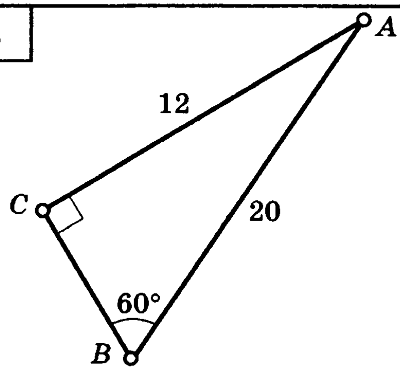
1



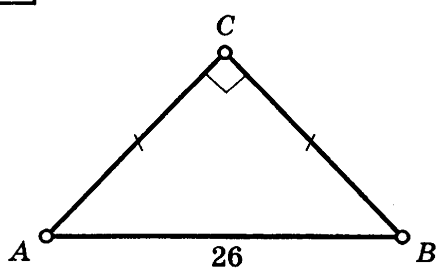
2



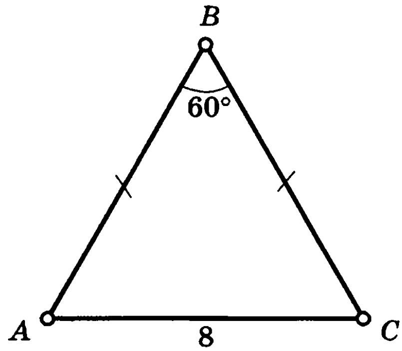
3



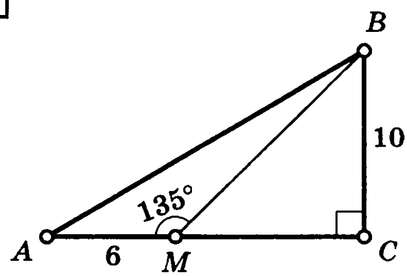
4



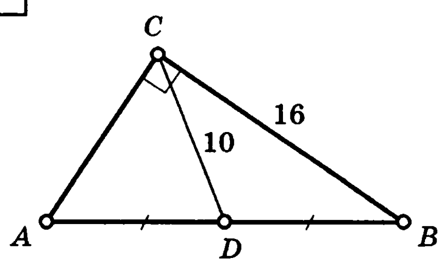
5



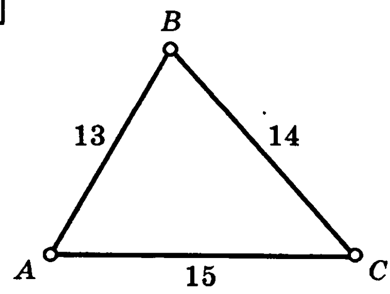
6



7

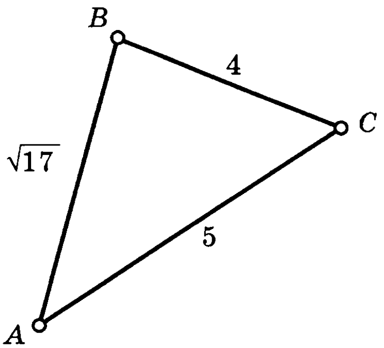


8

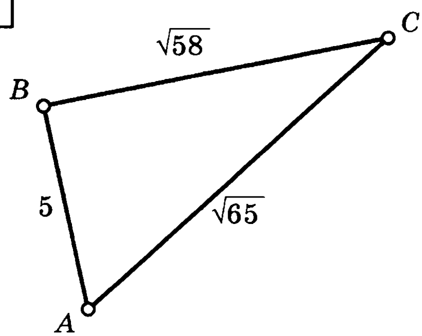


Продолжение табл. 10

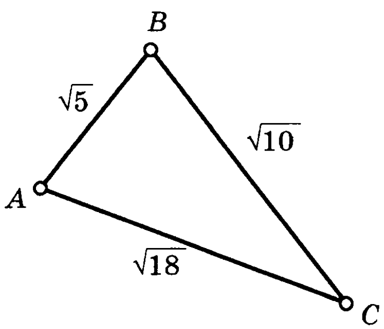
9



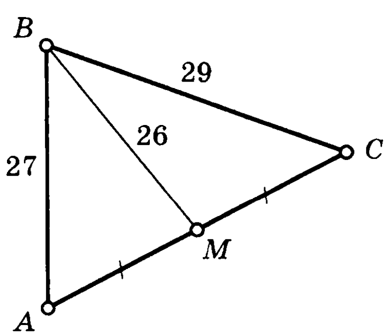
10



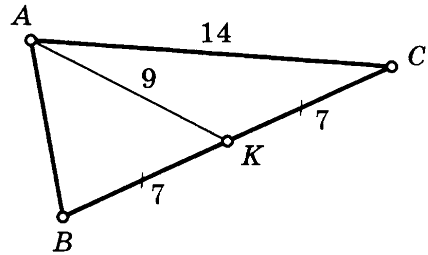
11



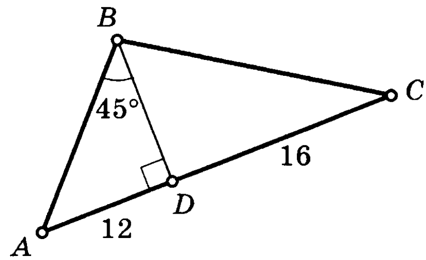
12



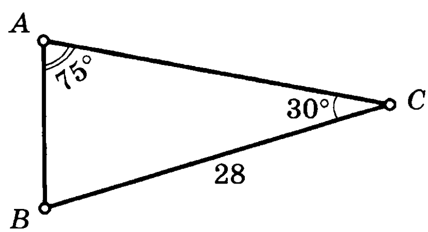
13



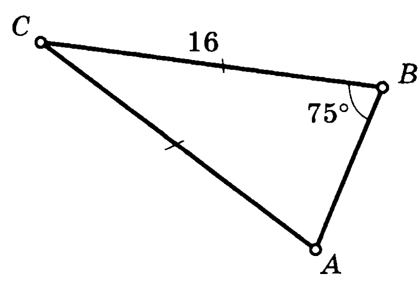
14



15



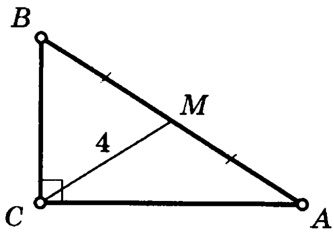
16



Окончание табл. 10

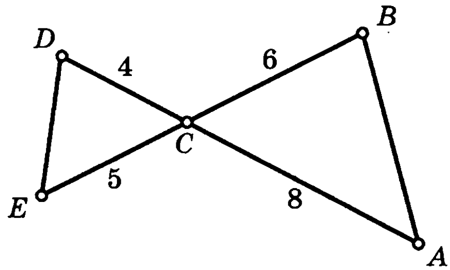
17

$\angle ACM : \angle BCM = 1 : 2$



19

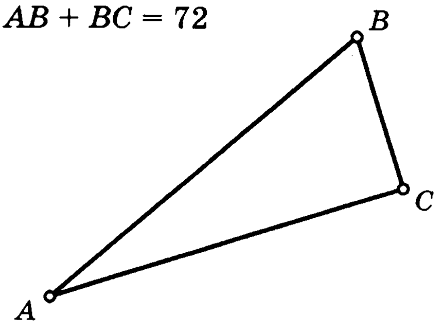
$S_{\Delta DEC} + S_{\Delta ABC} = 51$



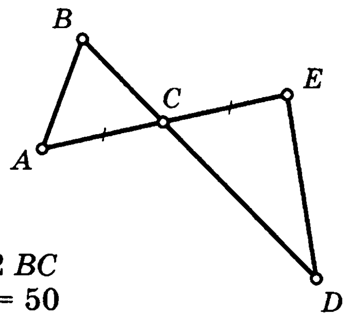
18

$\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$

$AB + BC = 72$



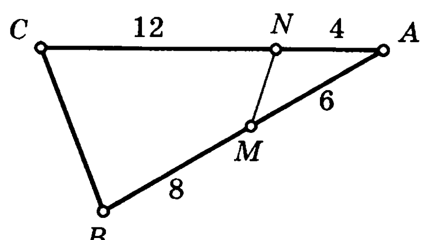
20



$CD = 2\ BC$

$S_{\Delta CED} = 50$

21



$S_{\Delta AMN} = 9$

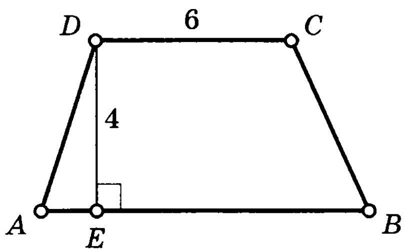
ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Таблица 11

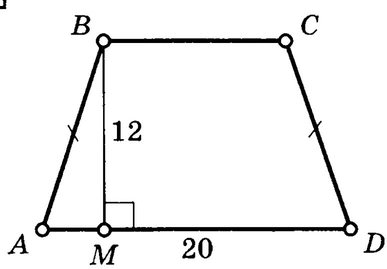
Найдите S_{ABCD}.

1

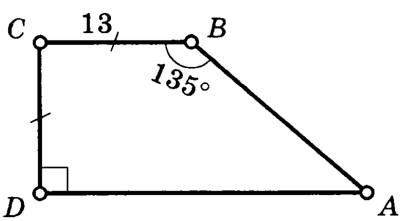
$AB = 10$



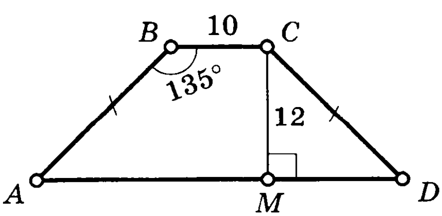
2



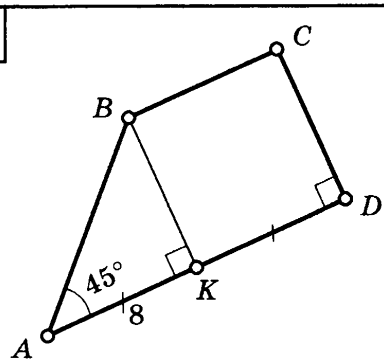
3



4

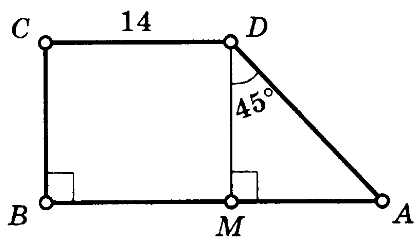


5

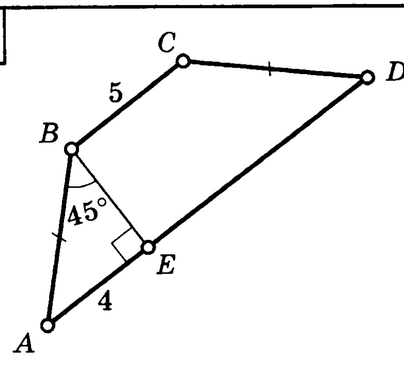


6

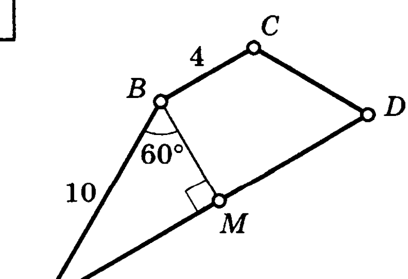
$AB = 25$



7



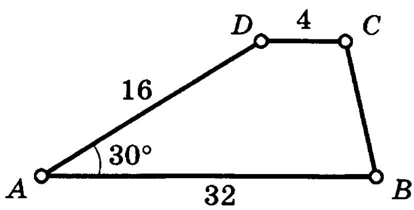
8



$AD = 15$

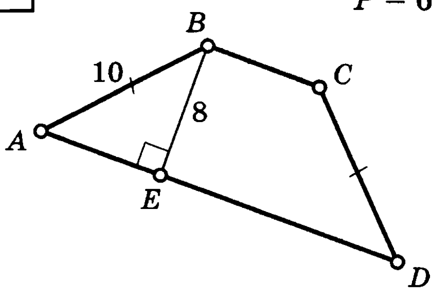
Продолжение табл. 11

9



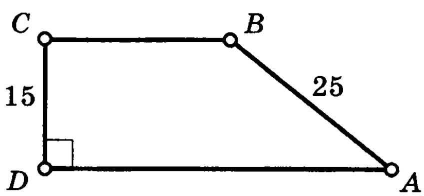
10

$P = 64$



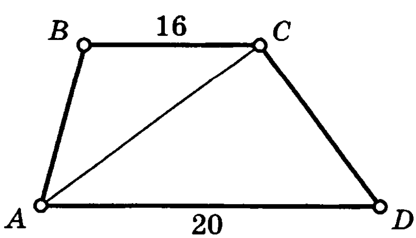
11

$P = 80$

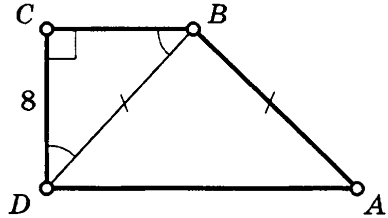


12

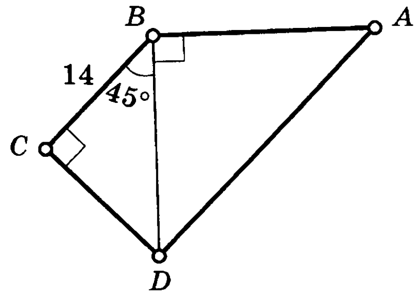
$S_{\Delta ACD} = 60$



13



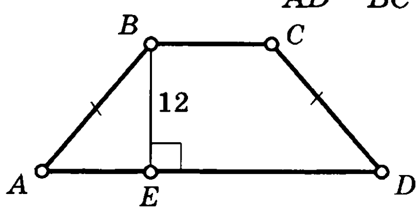
14



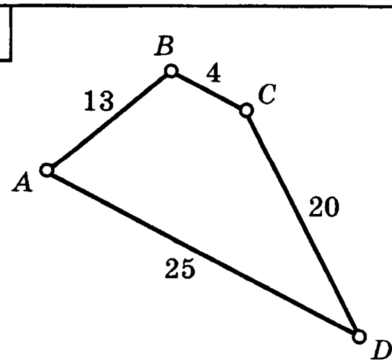
15

$BC = \frac{1}{2} ED$

$AD - BC = 4$



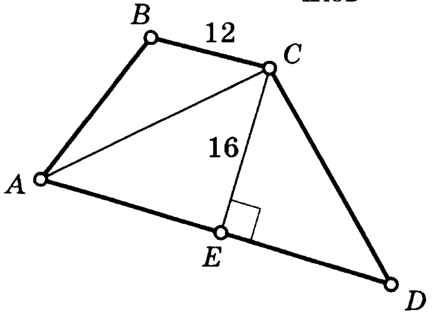
16



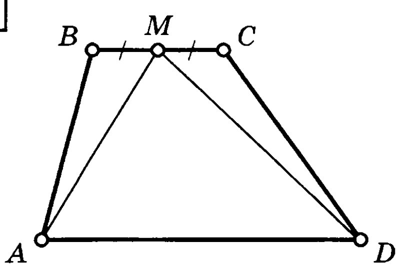
Продолжение табл. 11

17

$S_{\Delta ACD} = 196$



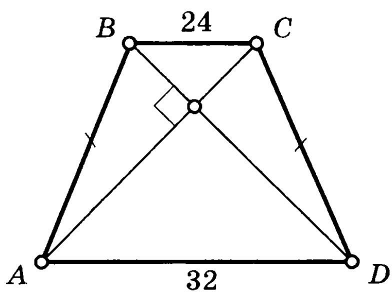
18



$AD : BC = 2 : 1$
$S_{\Delta AMD} = 120$

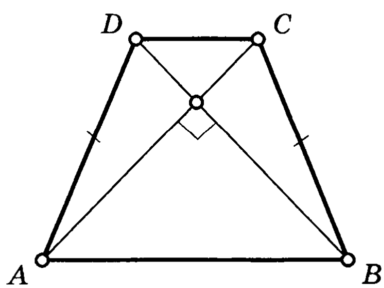
19

$ABCD$ — трапеция



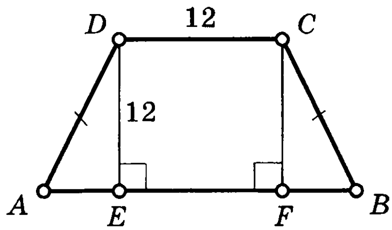
20

$ABCD$ — трапеция
$AC = BD = 8$



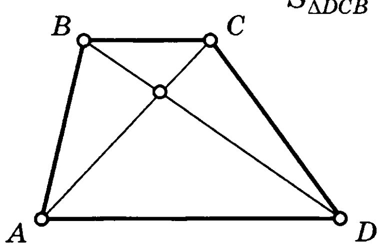
21

$AE = FB = \frac{1}{2}EF$



22

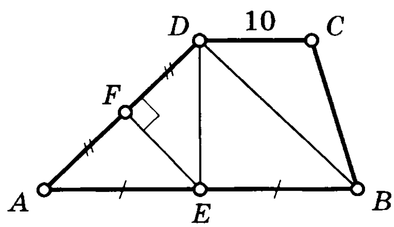
$S_{\Delta ACD} = 32$
$S_{\Delta DCB} = 13$



$ABCD$ — трапеция

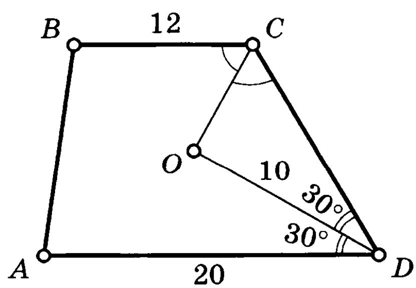
23

$ABCD$ — трапеция
$AD = DB$
$AB = 24$



24

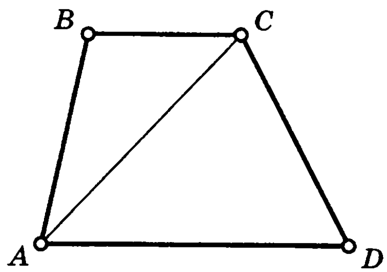
$ABCD$ — трапеция



Окончание табл. 11

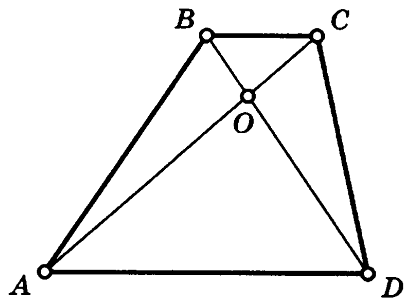
25

$BC : AD = 3 : 4$
$S_{\Delta ABC} = 30$



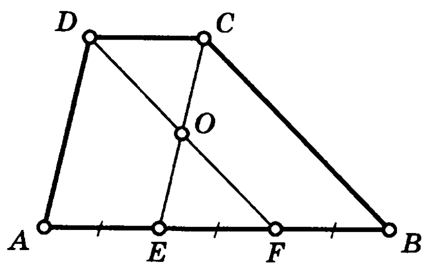
26

$S_{\Delta BOC} = 4$ $S_{\Delta AOD} = 25$



27

$AB : DC = 3 : 1$
$S_{\Delta DOC} = 8$

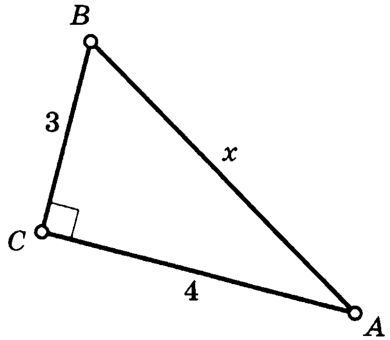


ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

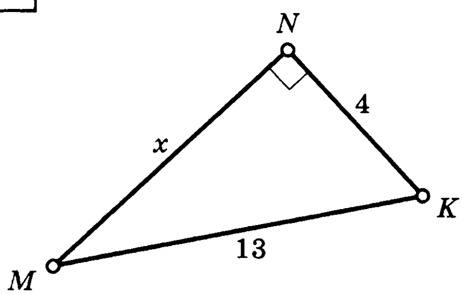
Таблица 12

Найдите x.

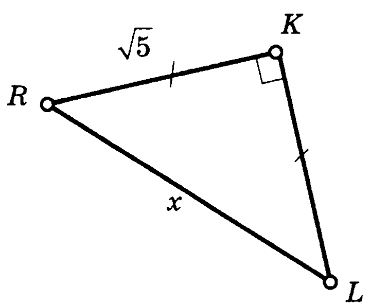
1



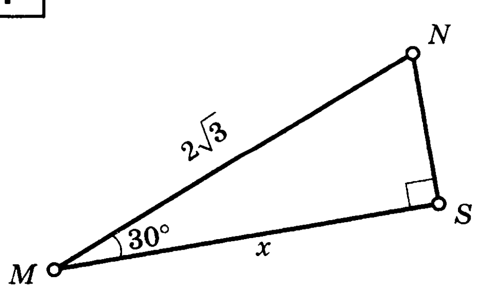
2



3

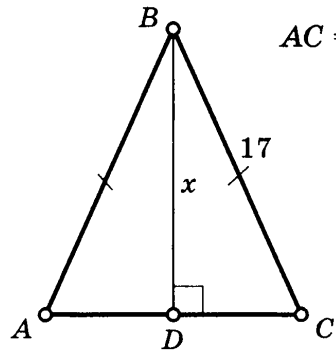


4



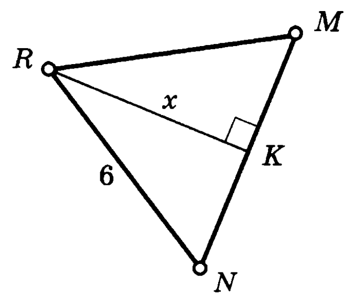
5

$AC = 16$



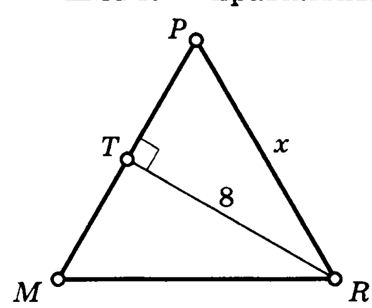
6

ΔRMN — правильный

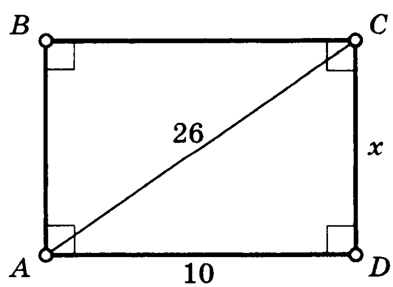


7

ΔMPR — правильный

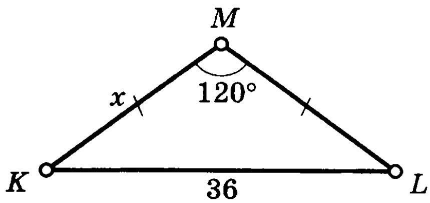


8



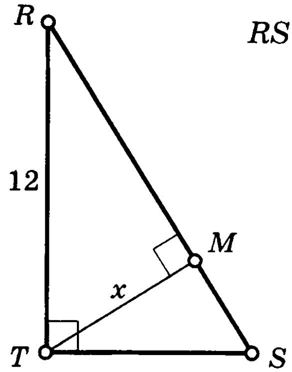
Продолжение табл. 12

9



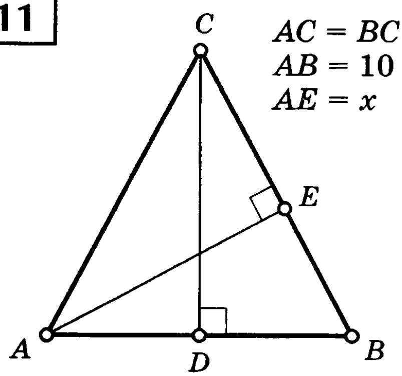
10

$RS = 13$



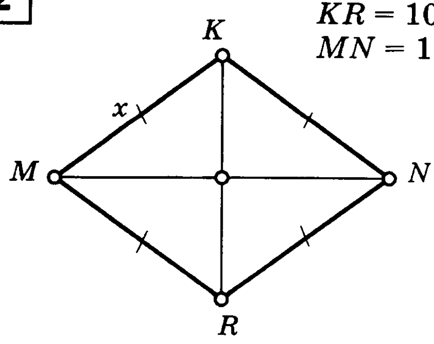
11

$AC = BC = 13$
$AB = 10$
$AE = x$



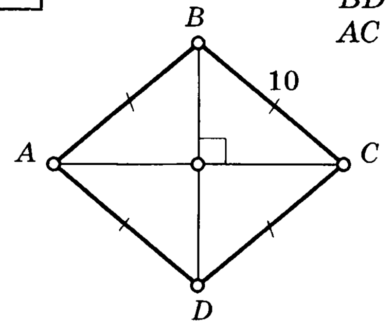
12

$KR = 10$
$MN = 12$



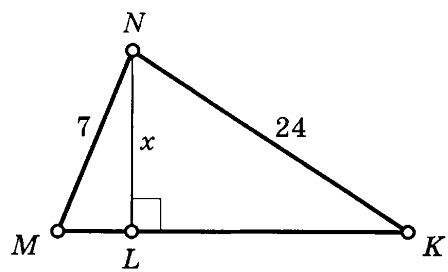
13

$BD = 12$
$AC = x$



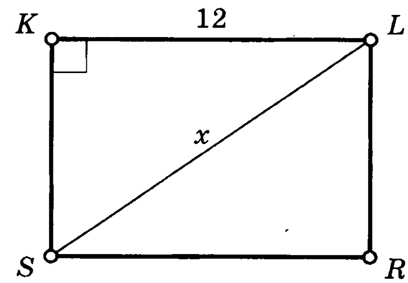
14

$MK = 25$



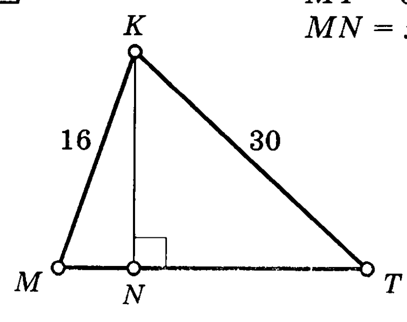
15

$SRLK$ — прямоугольник



16

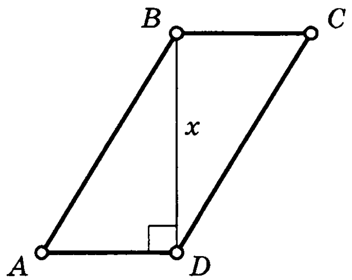
$MT = 34$
$MN = x$



Продолжение табл. 12

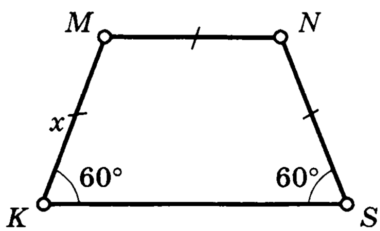
17

$AB - BC = 3 \quad P = 50$



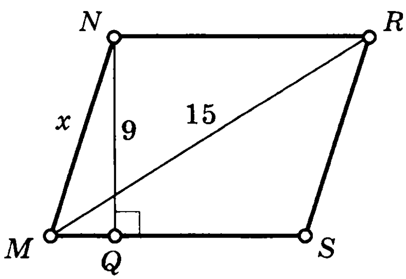
18

$S_{KMNS} = 96\sqrt{3}$



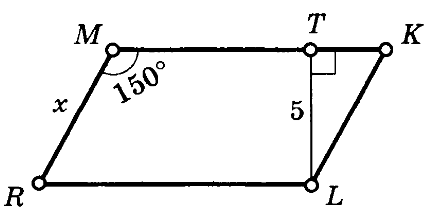
19

$S_{MNRS} = 99$

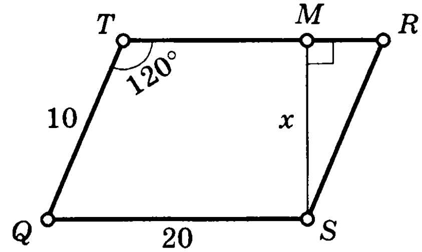


20

$RLKM$ — параллелограмм

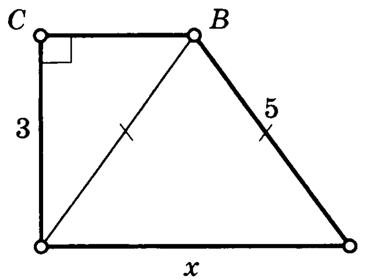


21



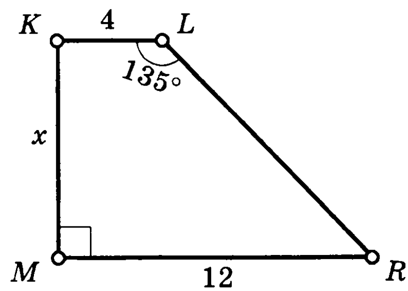
22

$ABCD$ — трапеция

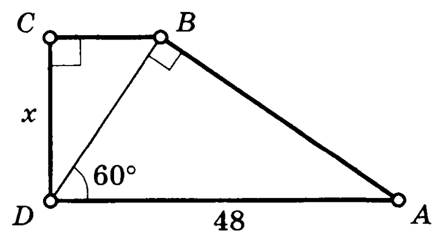


23

$MKLR$ — трапеция

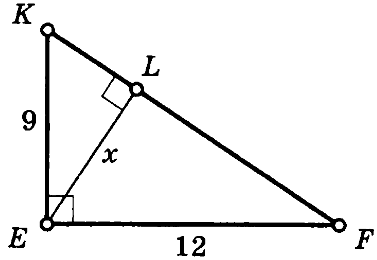


24



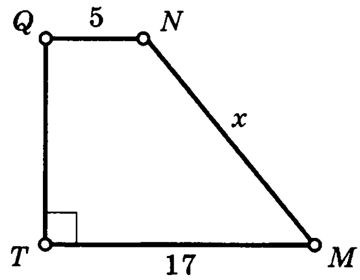
Продолжение табл. 12

25

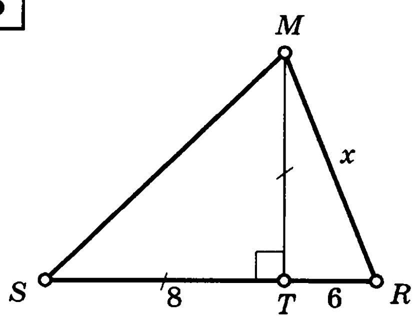


29

$S = 55$



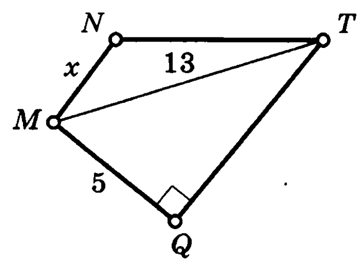
26



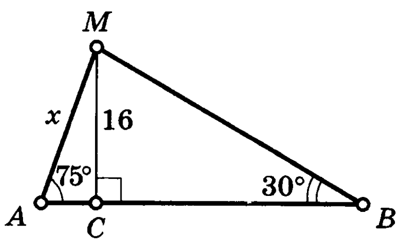
30

$MNTQ$ — трапеция

$S_{MNTQ} = 50$



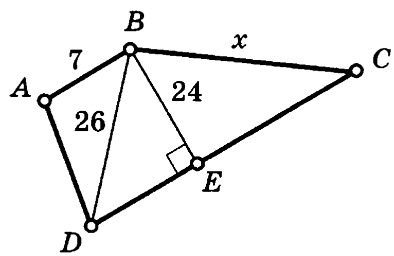
27



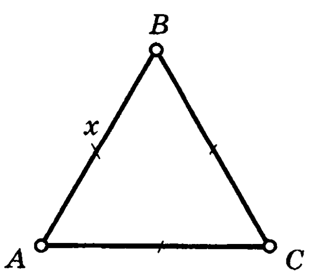
31

$ABCD$ — трапеция

$S_{ABCD} = 432$

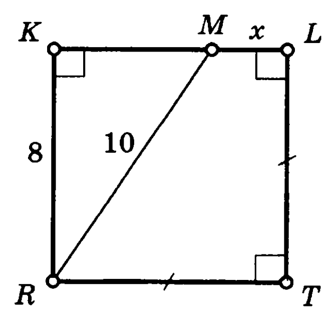


28



$S = 4\sqrt{3}$

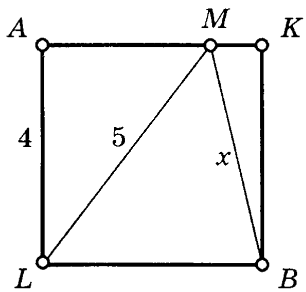
32



Продолжение табл. 12

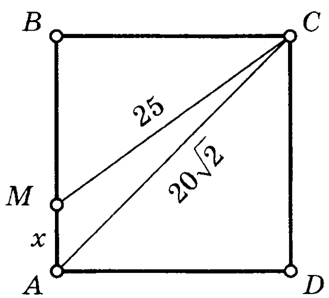
33

$AKBL$ — квадрат



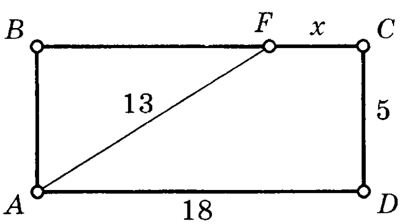
34

$ABCD$ — квадрат



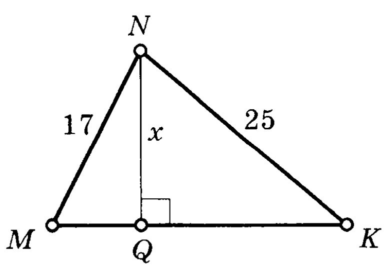
35

$ABCD$ — прямоугольник



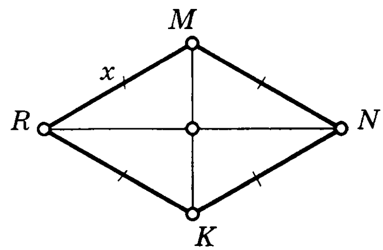
36

$P_{\triangle MNK} = 70$



37

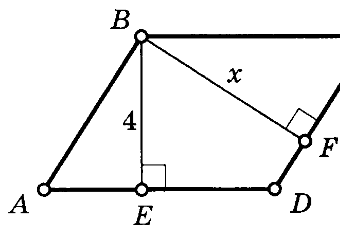
$RN - MK = 4$
$S_{RMNK} = 96$



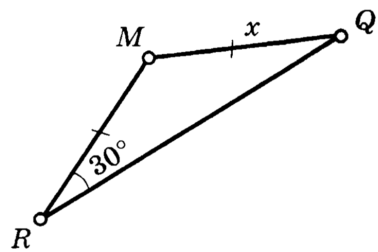
38

$ABCD$ — параллелограмм

$P_{ABCD} = 42,\ S_{ABCD} = \dfrac{140}{3}$



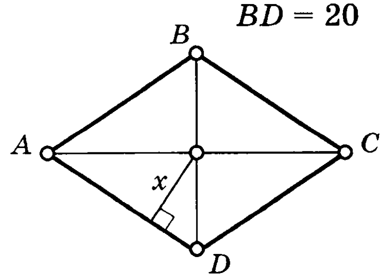
39



$S = 100\sqrt{3}$

40

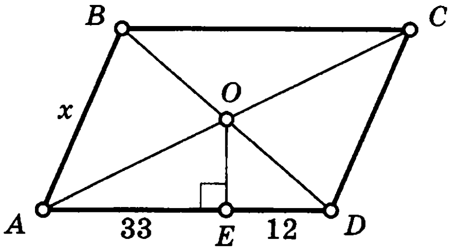
$ABCD$ — ромб
$S_{ABCD} = 480$
$BD = 20$



Продолжение табл. 12

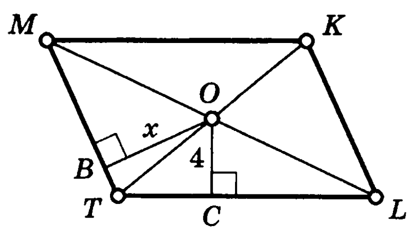
41

$ABCD$ — параллелограмм
$S = 900$



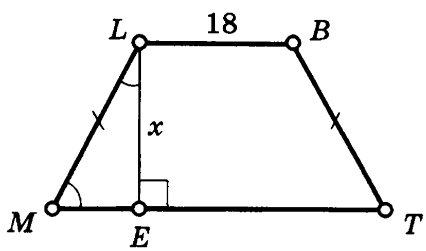
42

$MKLT$ — параллелограмм
$S_{MKLT} = 48,\ P_{MKLT} = 40$



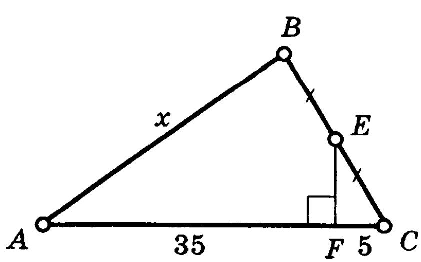
43

$MLBT$ — трапеция
$S = 243$



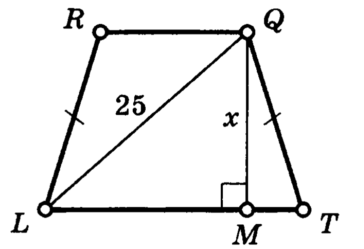
44

$S_{\Delta ABC} = 320$



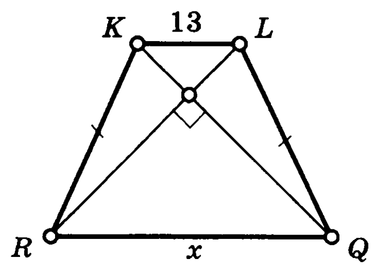
45

$LRQT$ — трапеция
$S_{LRQT} = 300$



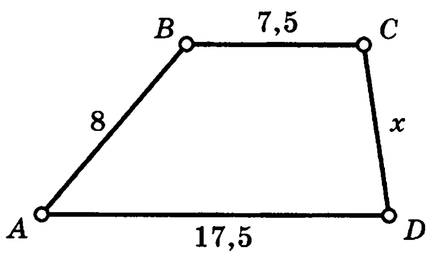
46

$RKQL$ — трапеция
$S = 100$



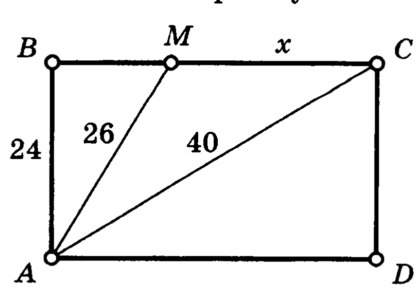
47

$S_{ABCD} = 60,\ AD \parallel BC$



48

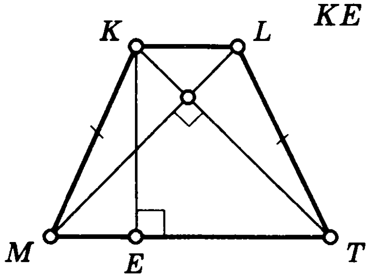
$ABCD$ — прямоугольник



Окончание табл. 12

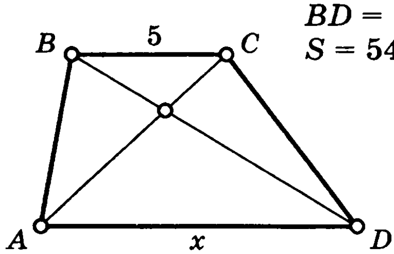
49

$MKLT$ — трапеция
$S = 81$
$KE = x$



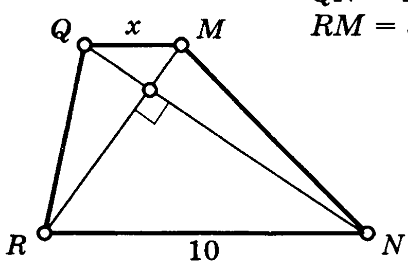
50

$ABCD$ — трапеция
$AC = 9$
$BD = 12$
$S = 54$



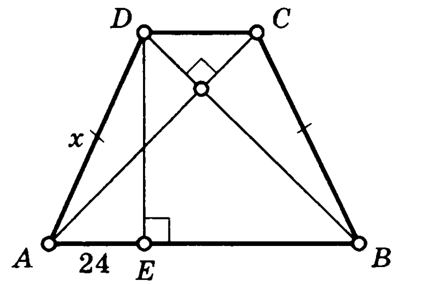
51

$RQMN$ — трапеция
$QN = 12$
$RM = 5$



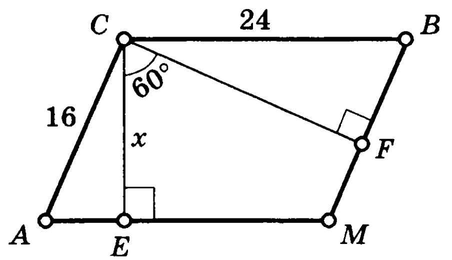
52

$ABCD$ — трапеция
$S = 100$



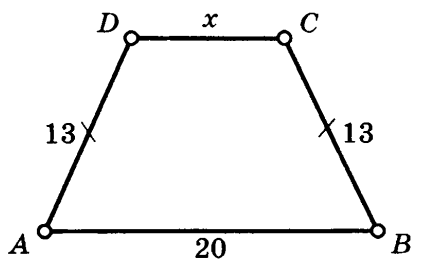
53

$ACBM$ — параллелограмм



54

$S_{ABCD} = 180$



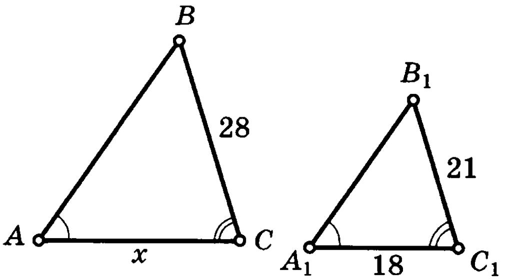
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 13

Найдите x, y, z.

1

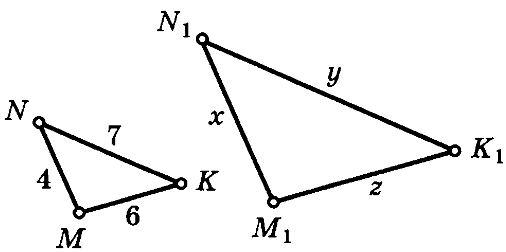
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



2

$\Delta MNK \sim \Delta M_1N_1K_1$

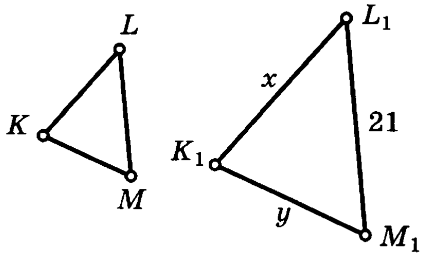
$N_1K_1 : NK = 2 : 1$



3

$\Delta KLM \sim \Delta K_1L_1M_1$

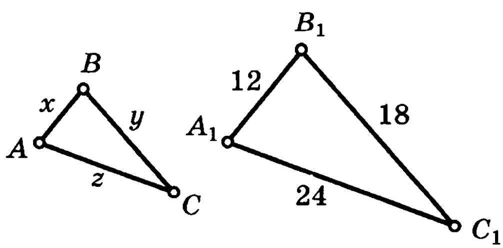
$KL : LM : KM = 6 : 7 : 5$



4

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

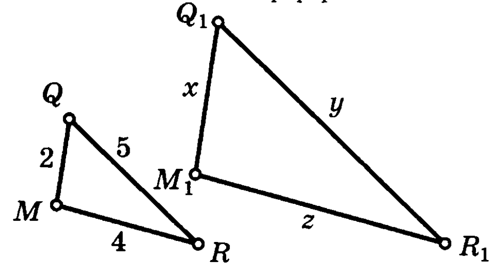
$P_{\Delta ABC} = 36$



5

$\Delta QMR \sim \Delta Q_1M_1R_1$

$P_{\Delta M_1Q_1R_1} = 110$



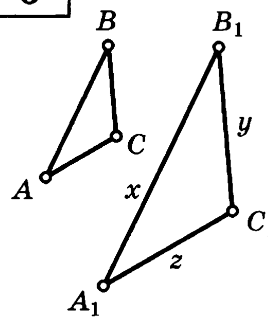
6

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

$AB : BC : AC =$

$= 6 : 4 : 3$

$P_{\Delta A_1B_1C_1} = 91$

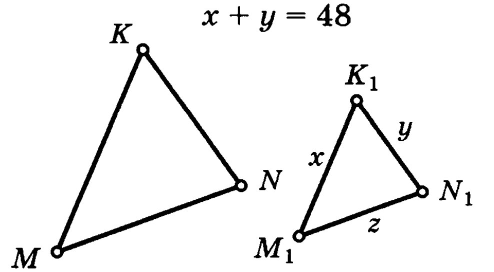


7

$\Delta MKN \sim \Delta M_1K_1N_1$

$MK : KN : MN = 9 : 7 : 8$

$x + y = 48$

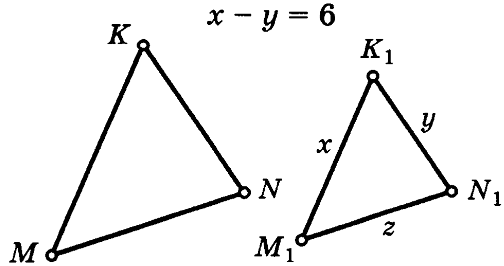


8

$\Delta MKN \sim \Delta M_1K_1N_1$

$MK : KN : MN = 9 : 7 : 8$

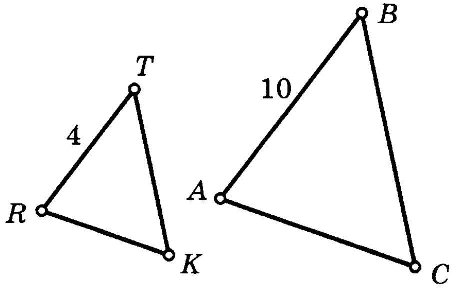
$x - y = 6$



Продолжение табл. 13

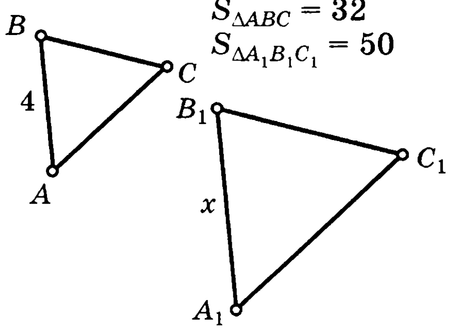
9

$\Delta RTK \sim \Delta ABC$
$S_{\Delta RTK} = 16,\ S_{\Delta ABC} = x$



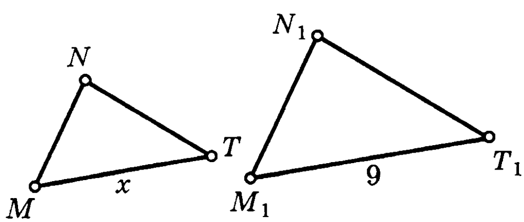
10

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
$S_{\Delta ABC} = 32$
$S_{\Delta A_1B_1C_1} = 50$



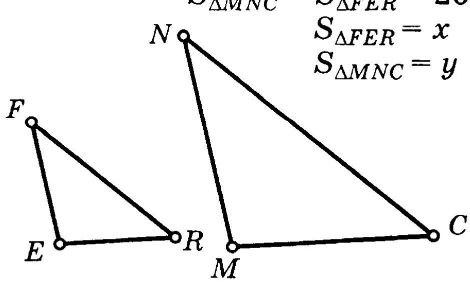
11

$\Delta MNT \sim \Delta M_1N_1T_1$
$S_{\Delta MNT} = 75$
$S_{\Delta M_1N_1T_1} = 225$



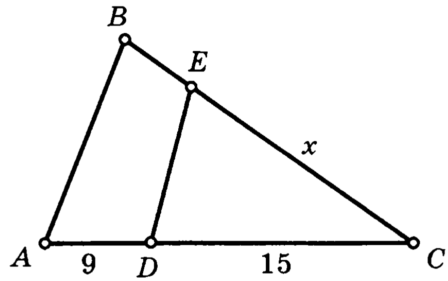
12

$\Delta FER \sim \Delta NMC$
$MN : FE = 7 : 6$
$S_{\Delta MNC} - S_{\Delta FER} = 26$
$S_{\Delta FER} = x$
$S_{\Delta MNC} = y$



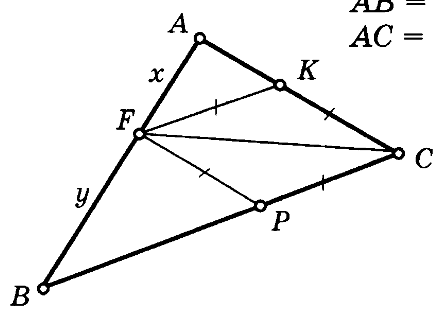
13

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$
$BC = 21$



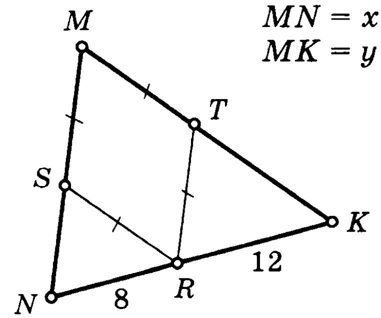
14

$BC = 14$
$AB = 12$
$AC = 10$



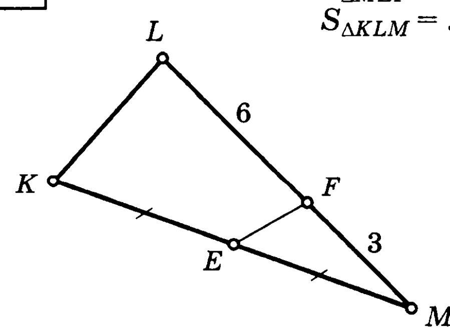
15

$P_{\Delta MNK} = 55$
$MN = x$
$MK = y$



16

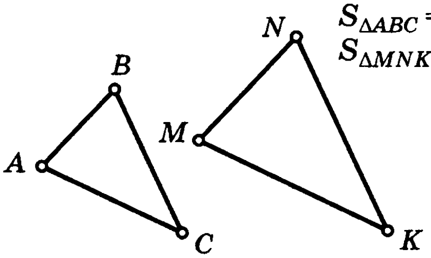
$S_{\Delta MEF} = 8$
$S_{\Delta KLM} = x$



Продолжение табл. 13

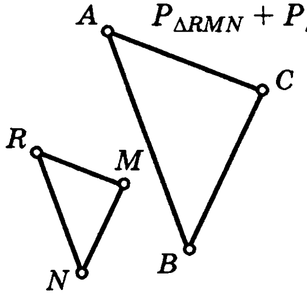
17

$\Delta ABC \sim \Delta MNK$
$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta MNK} = 2 : 3$
$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta MNK} = 130$
$S_{\Delta ABC} = x$
$S_{\Delta MNK} = y$



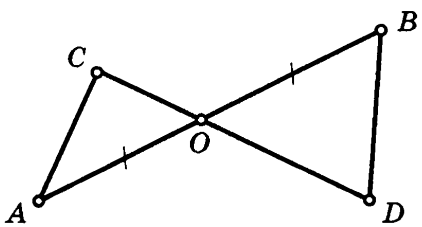
18

$\Delta RMN \sim \Delta ACB$
$S_{\Delta RMN} = 18,\ S_{\Delta ACB} = 32$
$P_{\Delta RMN} + P_{\Delta ACB} = 91$
$P_{\Delta RMN} = x$
$P_{\Delta ACB} = y$



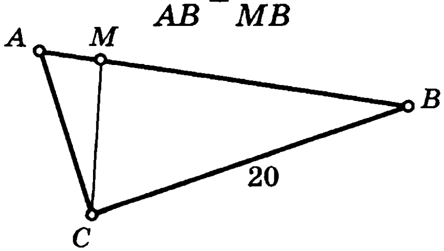
19

$CO : OD = 5 : 6$
$S_{\Delta AOC} = 5$
$S_{\Delta BOD} = x$



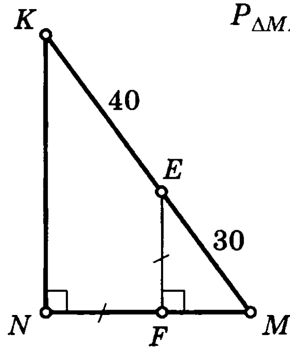
20

$S_{\Delta AMC} : S_{\Delta MCB} = 1 : 3$
$AB = x$
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AM}{MB}$



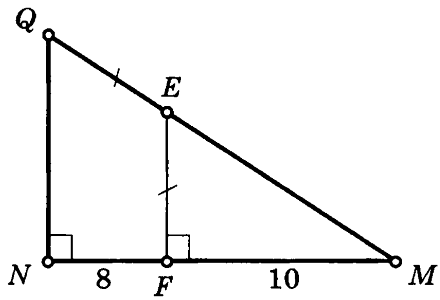
21

$P_{\Delta MNK} = x$



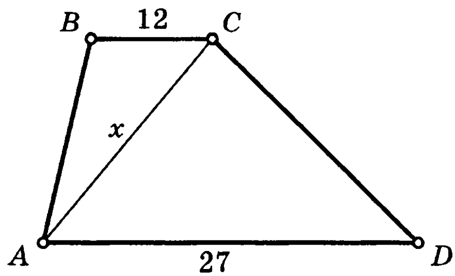
22

$P_{\Delta MNQ} = x$



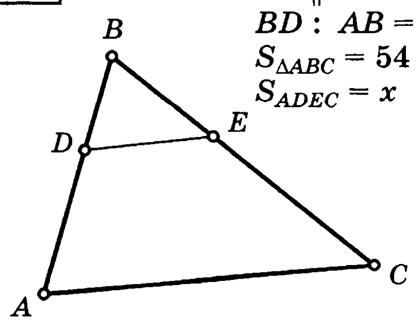
23

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$
$BC \parallel AD$



24

$DE \parallel AC$
$BD : AB = 1 : 3$
$S_{\Delta ABC} = 54$
$S_{ADEC} = x$



Продолжение табл. 13

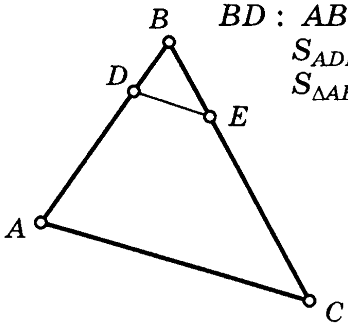
25

$DE \parallel AC$

$BD : AB = 1 : 4$

$S_{ADEC} = 60$

$S_{\Delta ABC} = x$

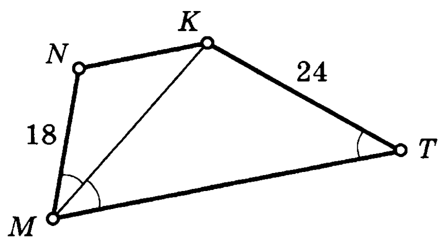


26

$\Delta MNK \sim \Delta MKT$

$NK \parallel MT$

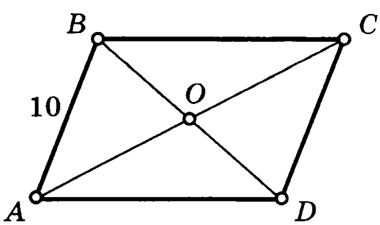
$P_{MNKT} = x$



27

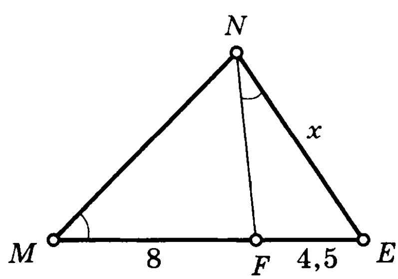
$ABCD$ — параллелограмм

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{OC}$, $P_{ABCD} = x$

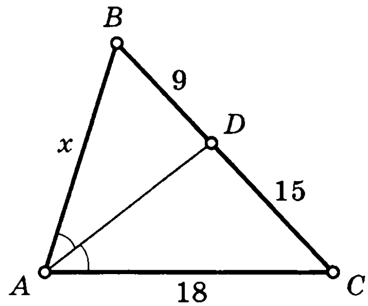


28

$\Delta NFE \sim \Delta MNE$

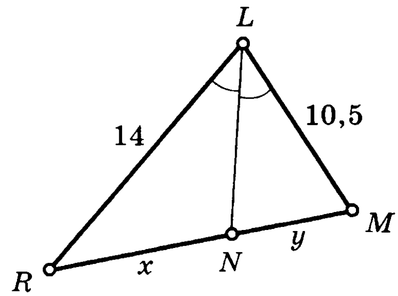


29



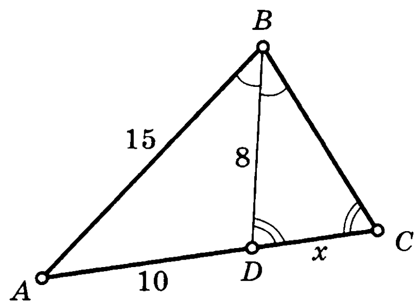
30

$RM = 20$



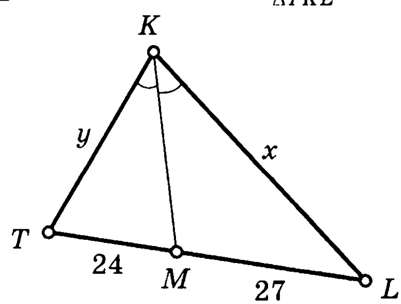
31

$DC = x$



32

$P_{\Delta TKL} = 153$

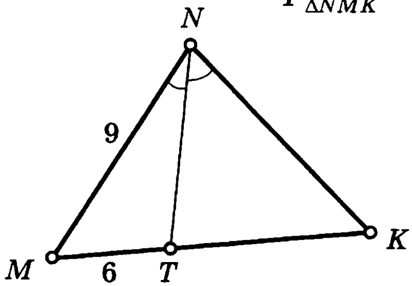


Окончание табл. 13

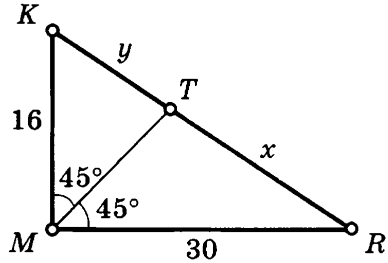
33

$NK = MK$

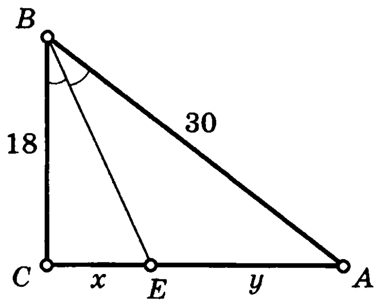
$P_{\Delta NMK} = x$



35



34



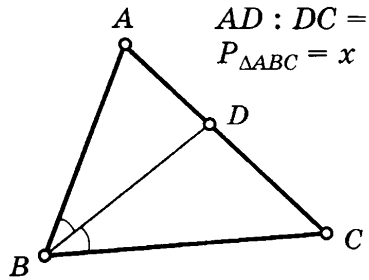
36

$AC = BC$

$AC - AB = 4{,}8$

$AD : DC = 3 : 5$

$P_{\Delta ABC} = x$

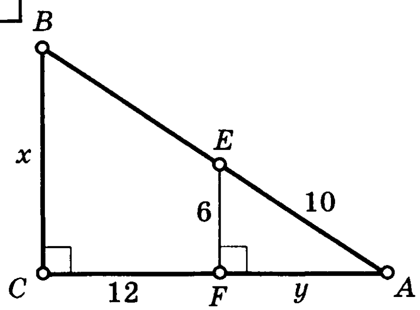


ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

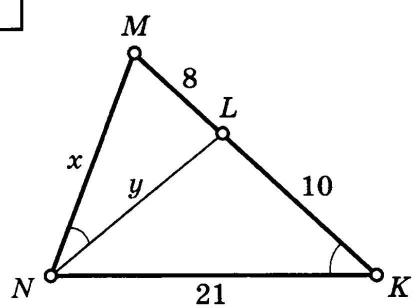
Таблица 14

Найдите x, y.

1

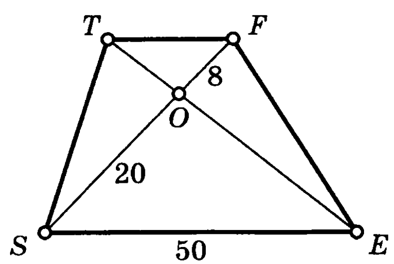


2



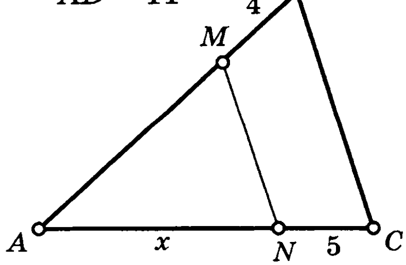
3

$TF \parallel SE$



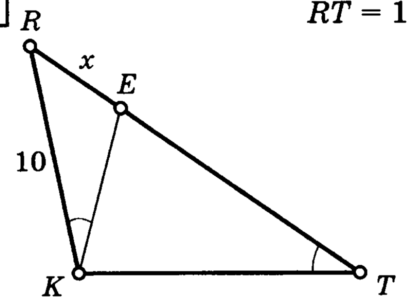
4

$DC \parallel MN$
$AD = 11$

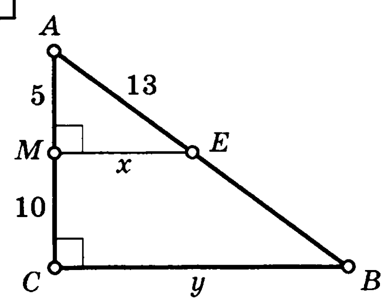


5

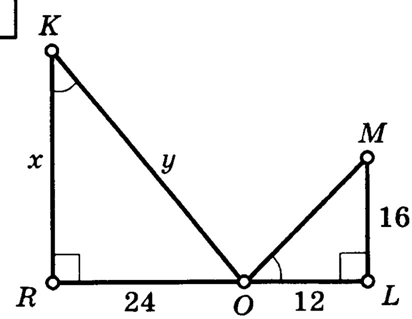
$RT = 17$



6

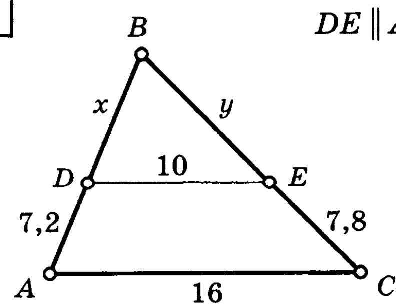


7



8

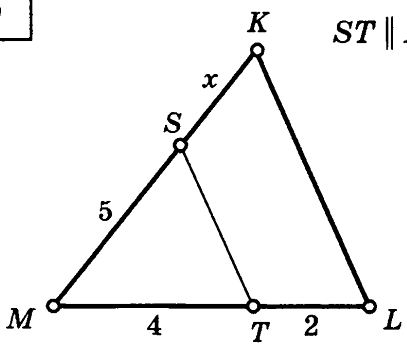
$DE \parallel AC$



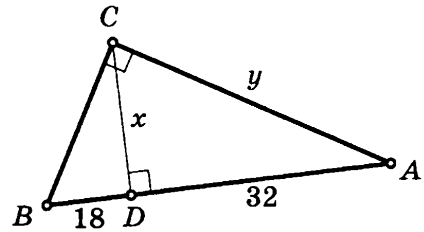
Продолжение табл. 14

9

$ST \parallel KL$

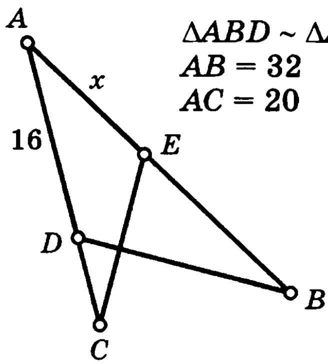


13



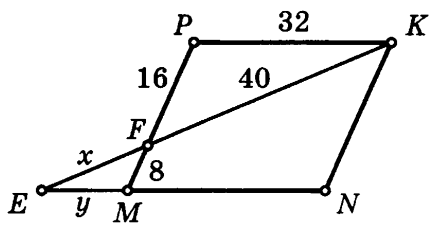
10

$\Delta ABD \sim \Delta AEC$
$AB = 32$
$AC = 20$



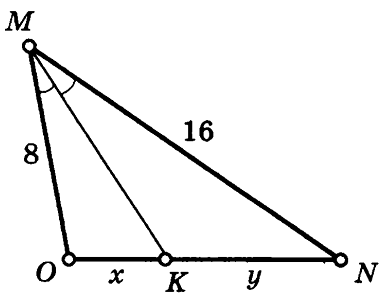
14

$PK \parallel MN$



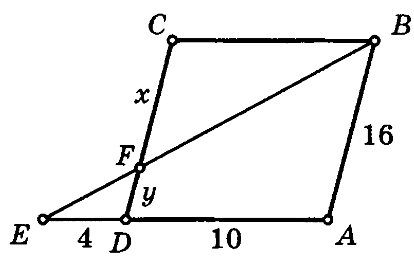
11

$ON = 12$



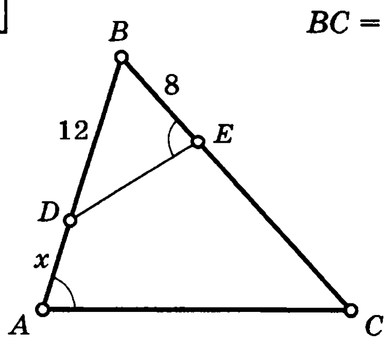
15

$CB \parallel DA$



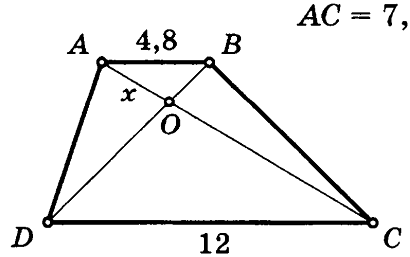
12

$BC = 24$



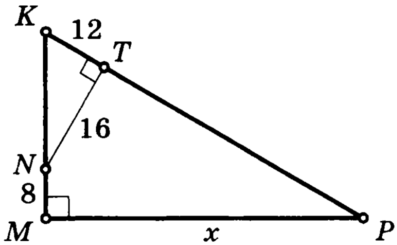
16

$AB \parallel DC$
$AC = 7{,}5$



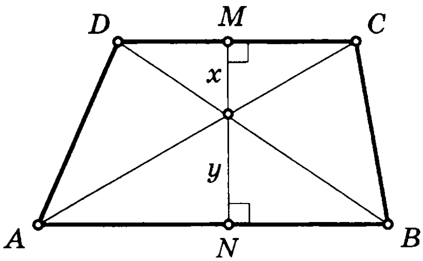
Продолжение табл. 14

17



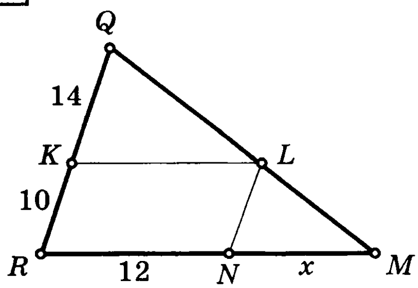
18

$AB \parallel DC$, $AB = 18$
$DC = 12$, $x + y = 20$



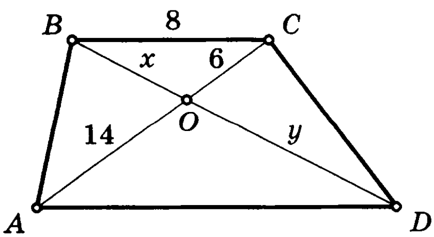
19

$RKLN$ — параллелограмм



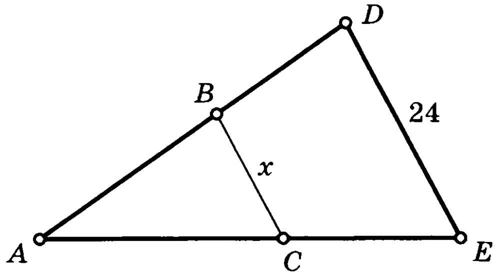
20

$ABCD$ — трапеция
$BD = 32$



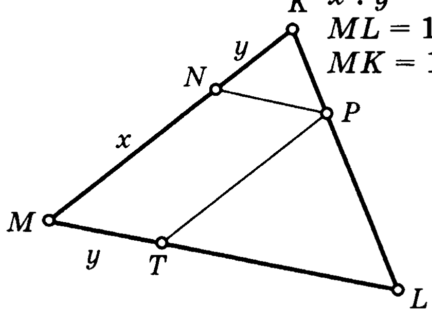
21

$BC \parallel DE$
$AB : BD = 2 : 1$



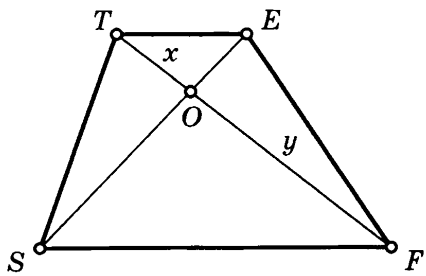
22

$MNPT$ — параллелограмм
$x : y = 3 : 1$
$ML = 12$
$MK = 18$



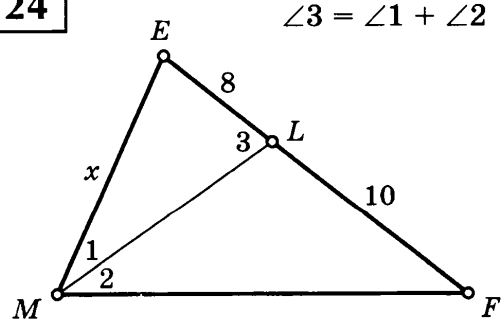
23

$P_{\Delta TOE} : P_{\Delta SOF} = 2 : 3$
$x + y = 10$, $TE \parallel SF$



24

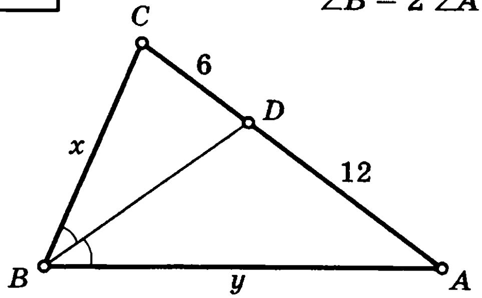
$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$



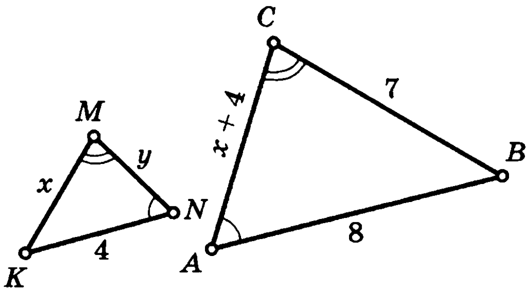
Окончание табл. 14

25

$\angle B = 2\angle A$

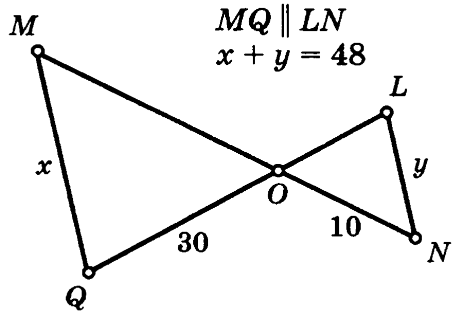


26



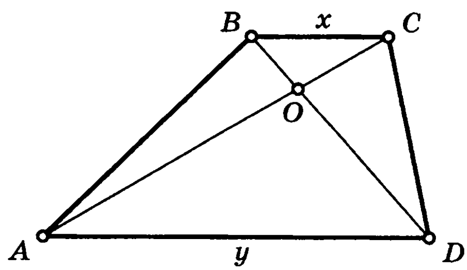
27

$MO : OL = 3 : 1$
$MQ \parallel LN$
$x + y = 48$



28

$S_{\Delta BOC} : S_{\Delta AOD} = 1 : 9$
$BC \parallel AD,\ x + y = 9{,}6$

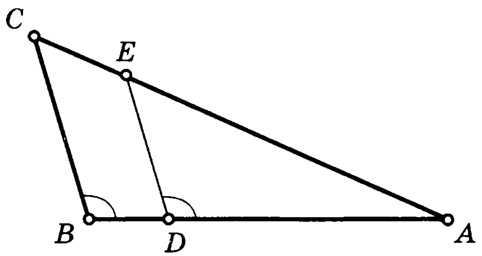


ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

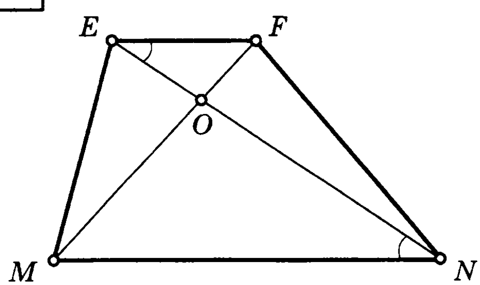
Таблица 15

Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

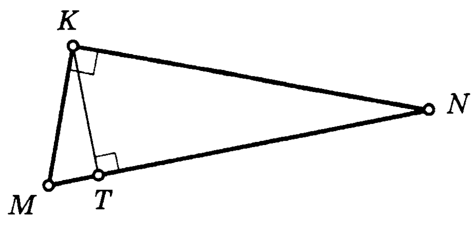
1



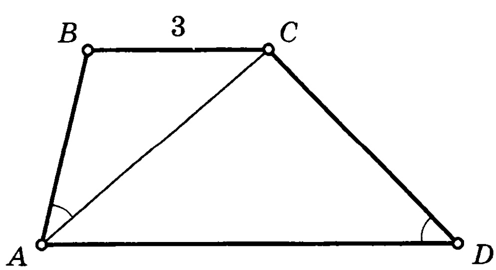
2



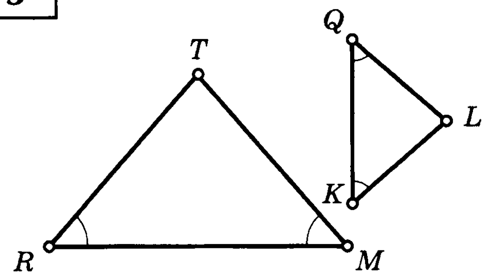
3



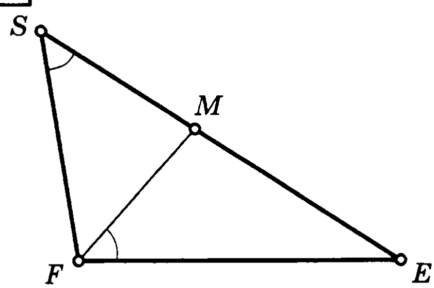
4 $ABCD$ — трапеция



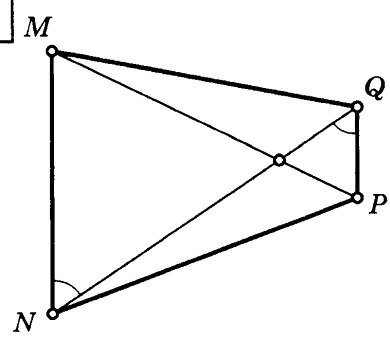
5



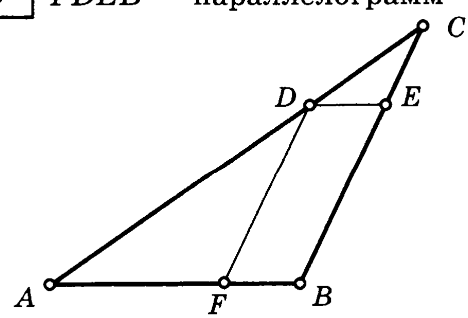
6



7

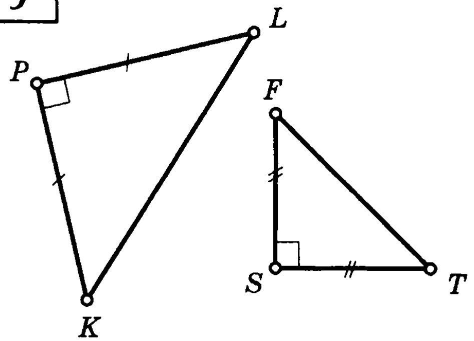


8 $FDEB$ — параллелограмм

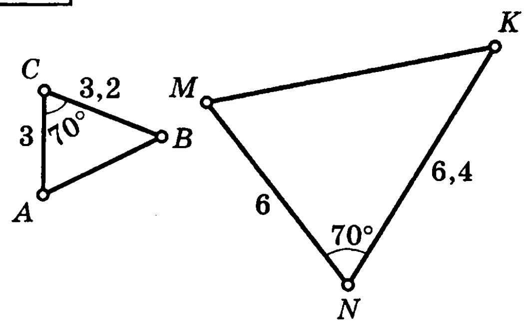


Продолжение табл. 15

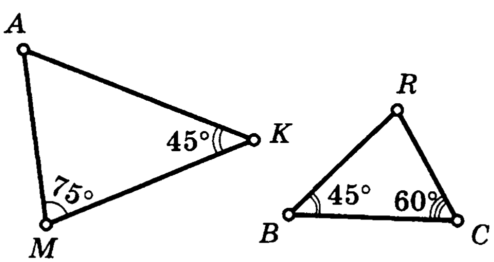
9



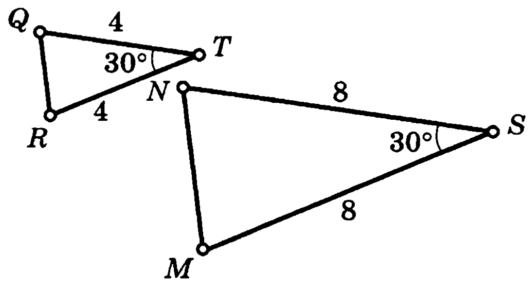
13



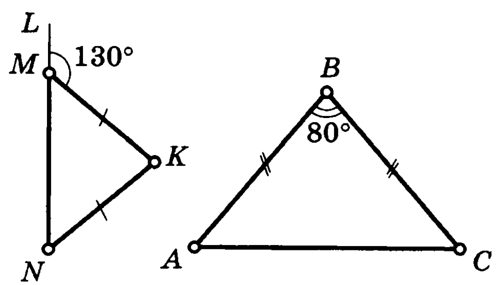
10



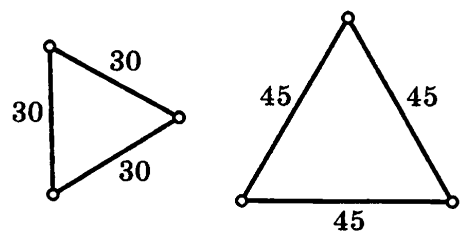
14



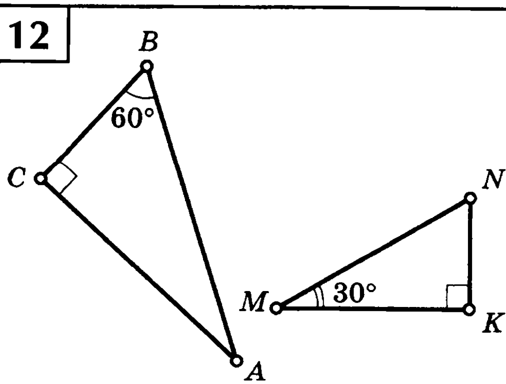
11



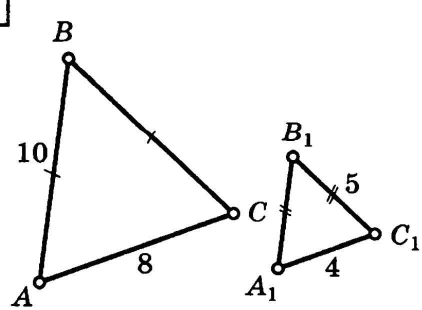
15



12

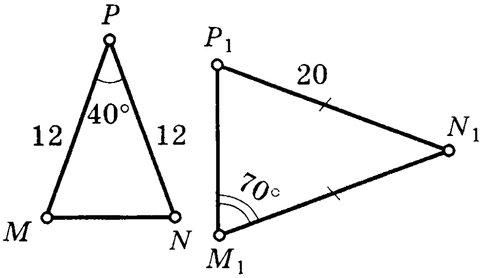


16

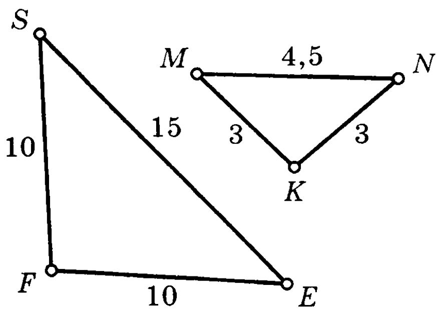


Продолжение табл. 15

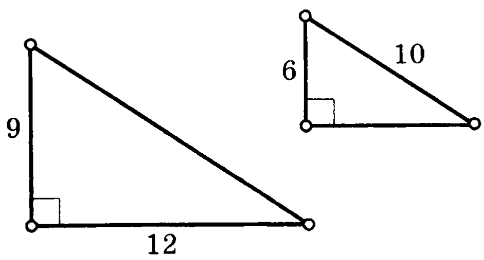
17



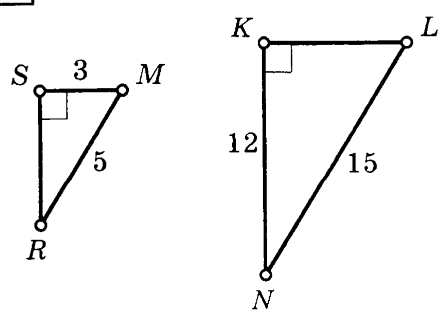
18



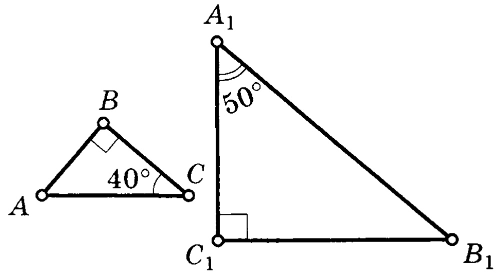
19



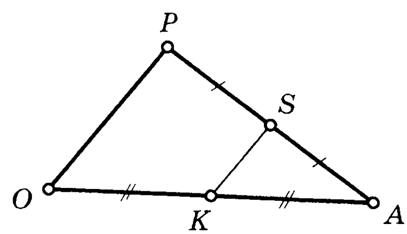
20



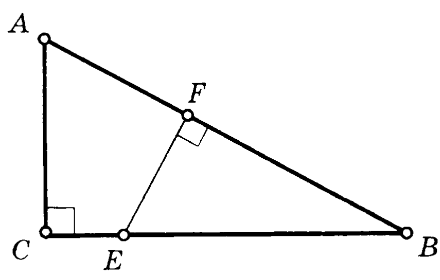
21



22

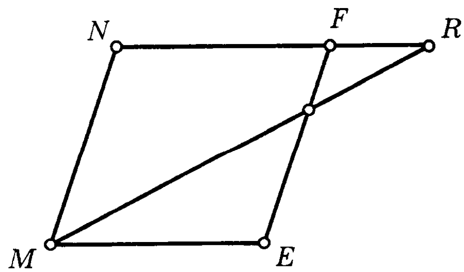


23



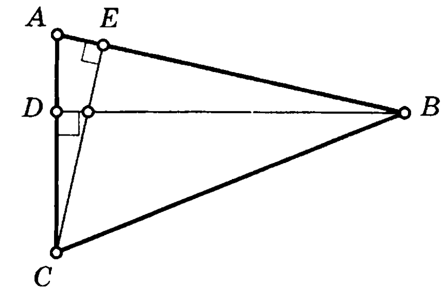
24

$MNFE$ — параллелограмм

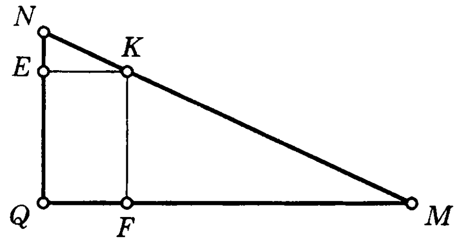


Окончание табл. 15

25



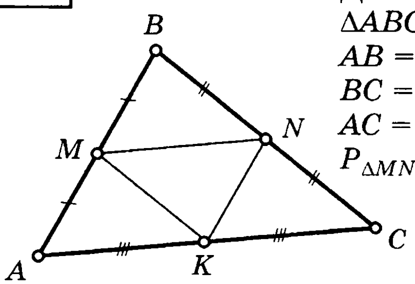
26 $EKFQ$ — прямоугольник



СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

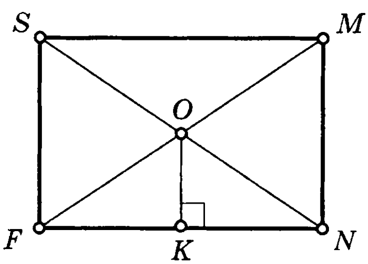
Таблица 16

1



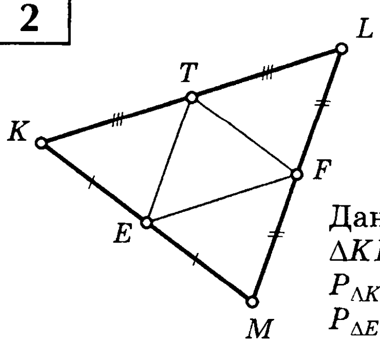
Дано:
ΔABC
$AB = 16$
$BC = 18$
$AC = 20$
$P_{\Delta MNK}$ — ?

3 Дано: $FSMN$ — прямоугольник



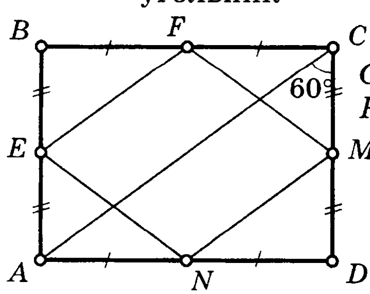
$OK = 24$,
SF — ?

2



Дано:
ΔKLM
$P_{\Delta KLM} = 24$
$P_{\Delta ETF}$ — ?

4 Дано: $ABCD$ — прямоугольник

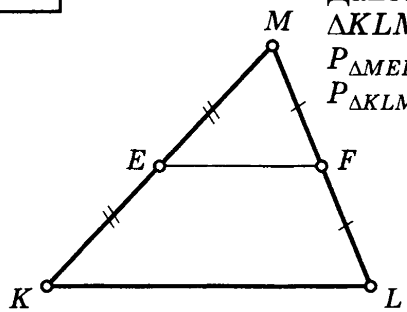


$CD = 30$,
P_{EFMN} — ?

Продолжение табл. 16

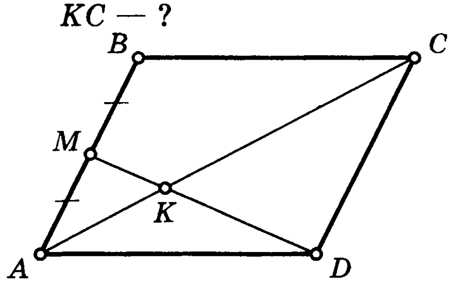
5

Дано: ΔKLM
$P_{\Delta MEF} = 31$
$P_{\Delta KLM}$ — ?



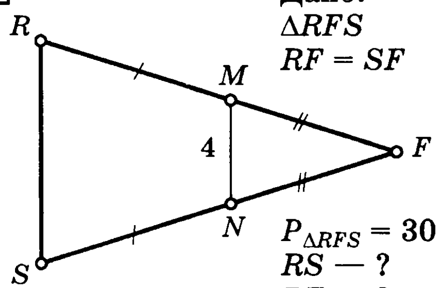
6

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC = 18$, AK — ?, KC — ?



7

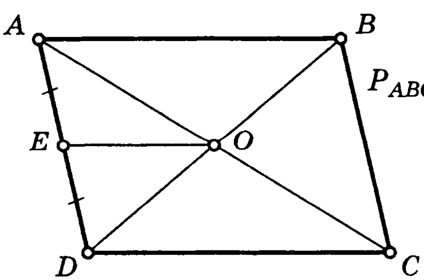
Дано: ΔRFS
$RF = SF$



$P_{\Delta RFS} = 30$
RS — ?
RF — ?

8

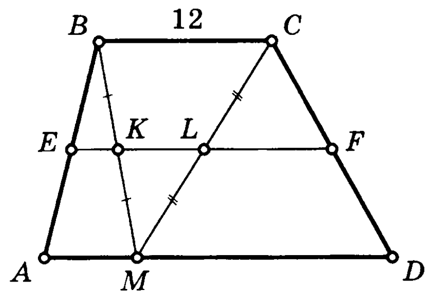
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $EO = 4$, $ED = 3$,



P_{ABCD} — ?

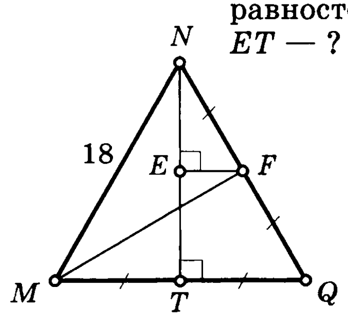
9

Дано: $ABCD$ — трапеция
$AD = 2\ BC$, EF — ?



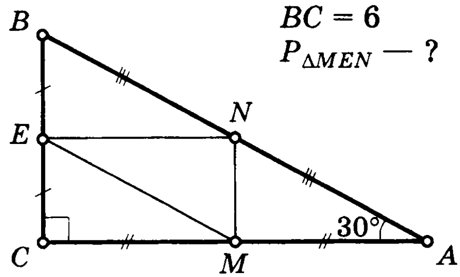
10

Дано: ΔMNQ — равносторонний
ET — ?



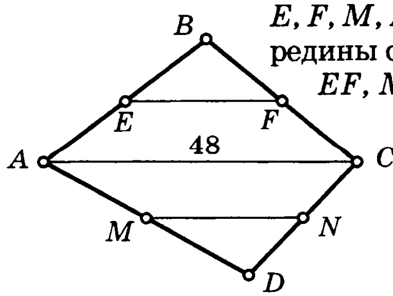
11

Дано: ΔABC
$BC = 6$
$P_{\Delta MEN}$ — ?



12

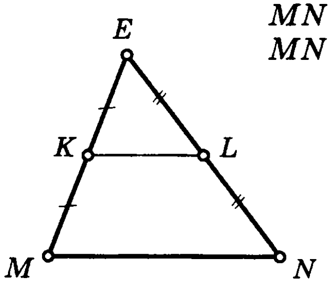
Дано: $ABCD$ — четырехугольник
E, F, M, N — середины сторон
EF, MN — ?



Окончание табл. 16

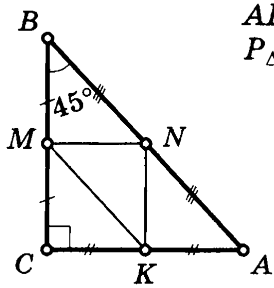
13

Дано: ΔMEN
$MN - KL = 6$
MN — ?



15

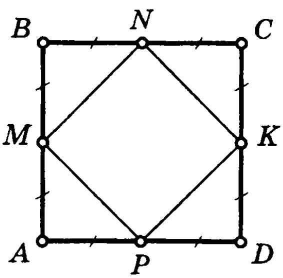
Дано: ΔABC
$AB = 16$
$P_{\Delta MNK}$ — ?



14

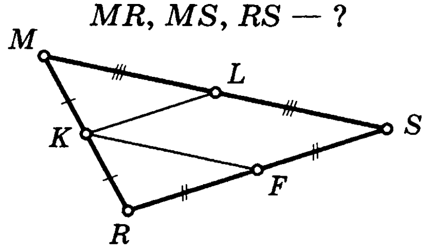
Дано: $ABCD$ — квадрат

$\frac{S_{MNKP}}{S_{ABCD}}$ — ?



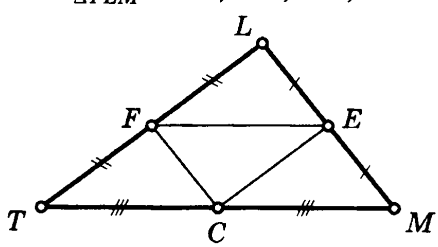
16

Дано: ΔMRS
$MR : MS : RS = 3 : 6 : 4$
$P_{\Delta KLF} = 10{,}4$
MR, MS, RS — ?



17

Дано: ΔTLM
$TL : LM : TM = 4 : 3 : 5$
$P_{\Delta TLM} = 60$, FE, EC, FC — ?



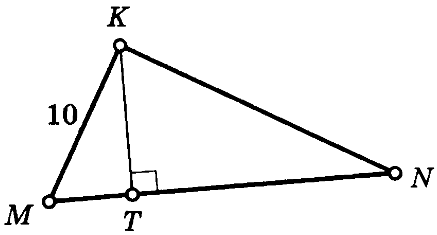
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 17

Найдите неизвестные линейные элементы ΔMNK ($\angle K = 90°$).

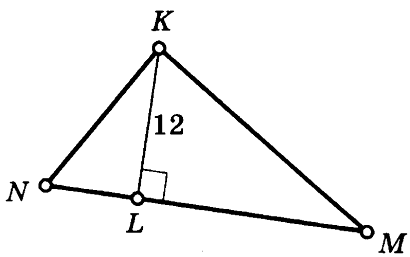
1

$MN = 26$

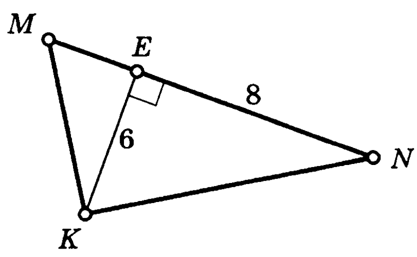


2

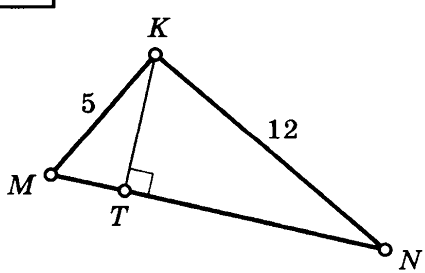
$MN = 25$



3

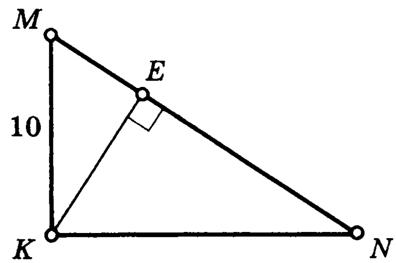


4



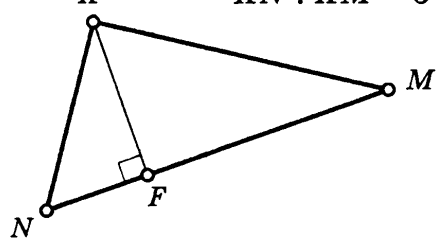
5

$MN = 25$



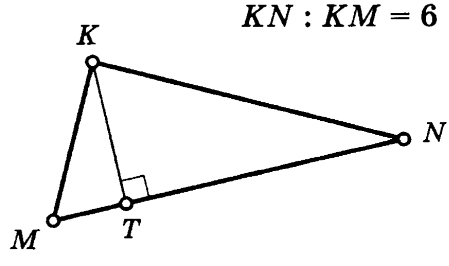
6

$MN = 50$
$KN : KM = 3 : 4$



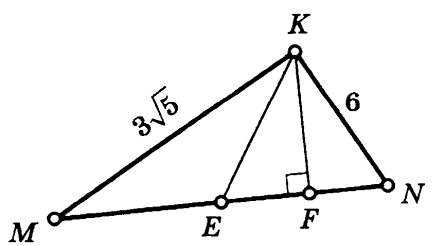
7

$TN - MT = 11$
$KN : KM = 6 : 5$



8

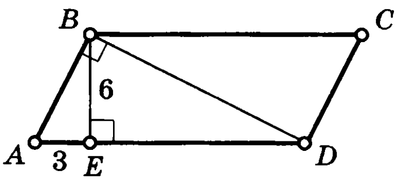
$ME = EN$



Окончание табл. 17

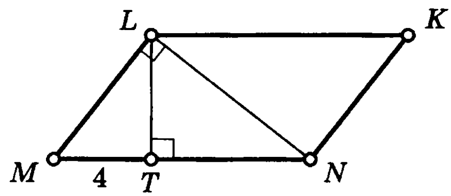
9

ABCD — параллелограмм
S_{ABCD} — ?



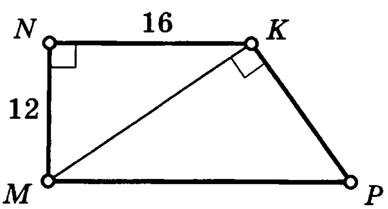
12

MLKN — параллелограмм
$MN : ML = 2 : 1$
S_{MNKL} — ?



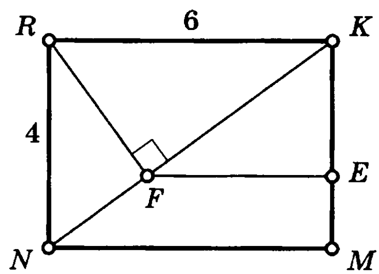
10

MNKP — трапеция
S_{MNKP} — ?



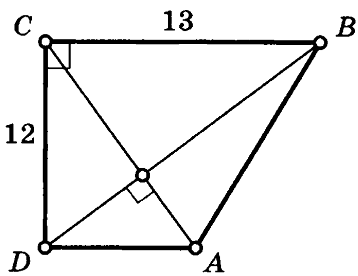
13

RKMN — прямоугольник
$FE \parallel NM$, FE — ?



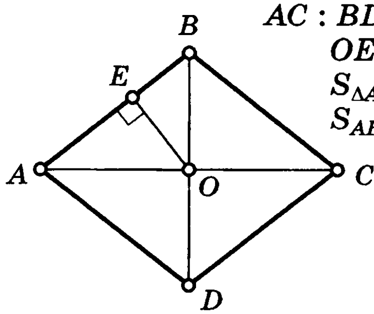
11

ABCD — трапеция
AD — ?



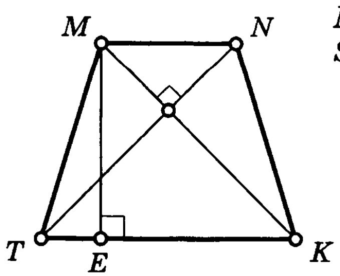
14

ABCD — ромб
$AC : BD = 3 : 2$
$OE \perp AB$
$S_{\Delta AOE} = 27$
S_{ABCD} — ?



15

TMNK — трапеция
$MK = 15$
$ME = 9$
S_{TMNK} — ?

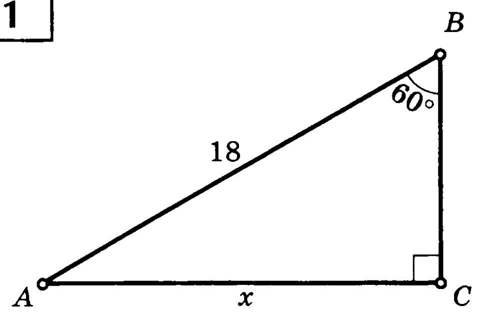


СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

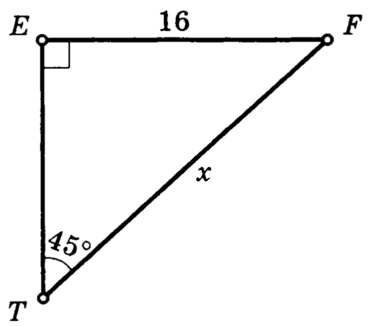
Таблица 18

Найдите x.

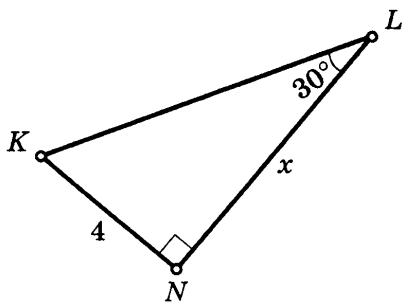
1



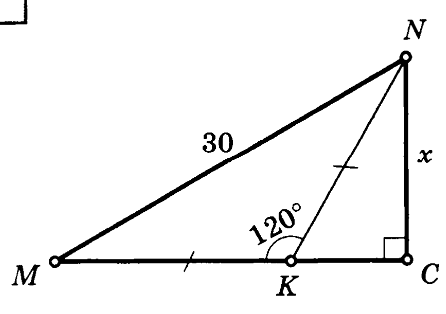
2



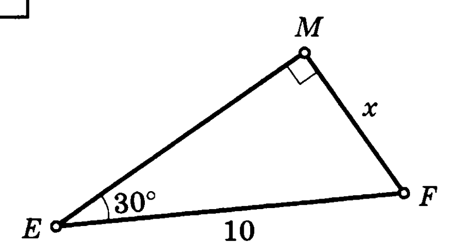
3



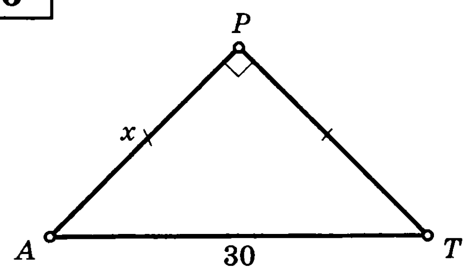
4



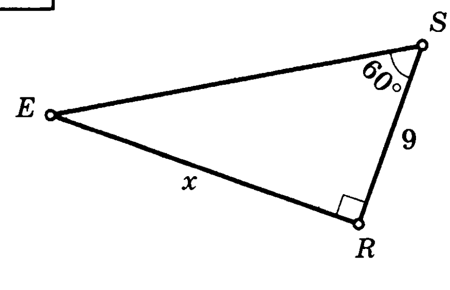
5



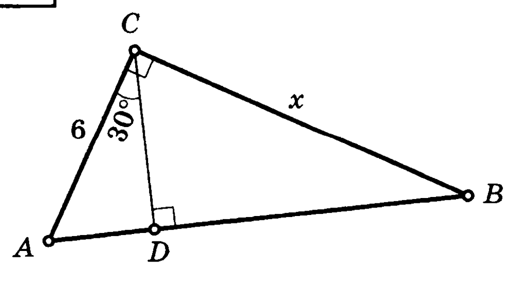
6



7

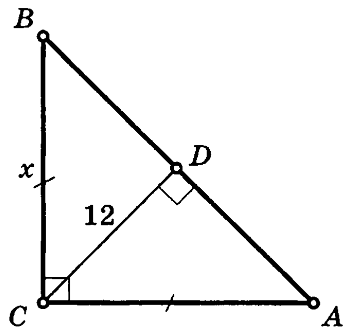


8



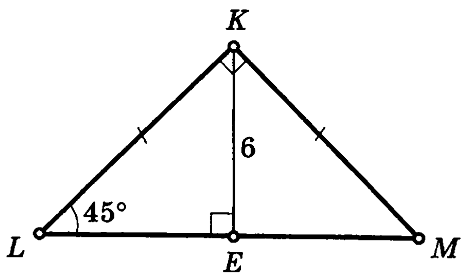
Окончание табл. 18

9

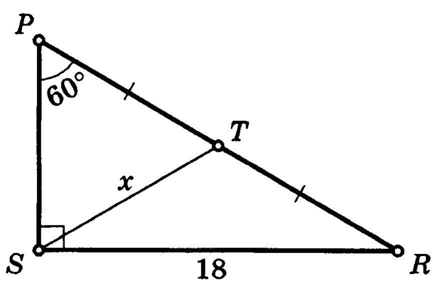


10

$LM = x$ — ?

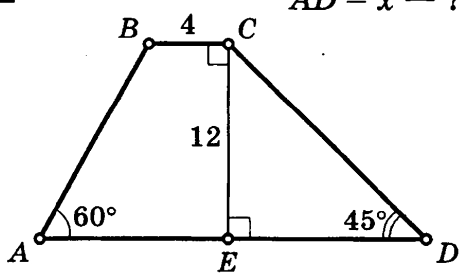


11

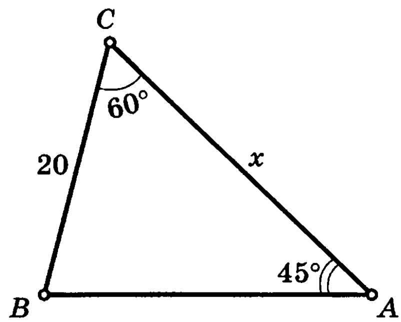


12

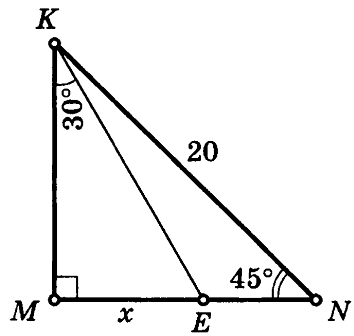
$AD = x$ — ?



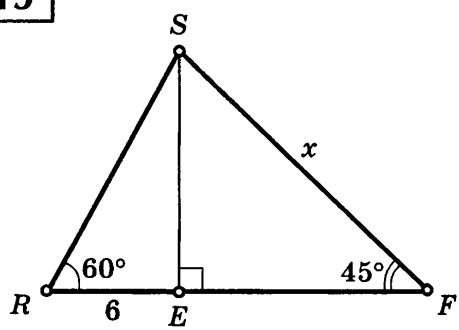
13



14

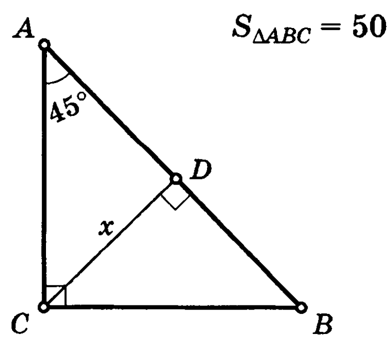


15



16

$S_{\Delta ABC} = 50$

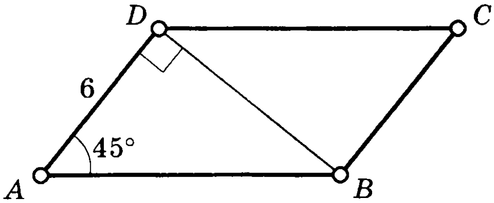


СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 19

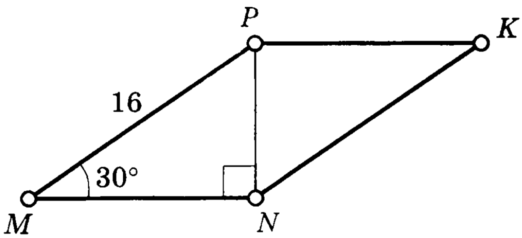
1

$ABCD$ — параллелограмм
S_{ABCD} — ?



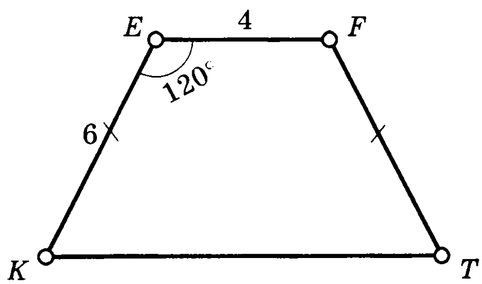
2

$MNKP$ — параллелограмм
S_{MNKP} — ?



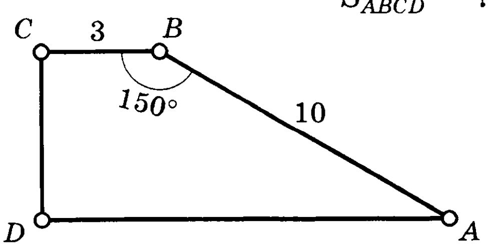
3

$EF \parallel KT$, S_{EFTK} — ?



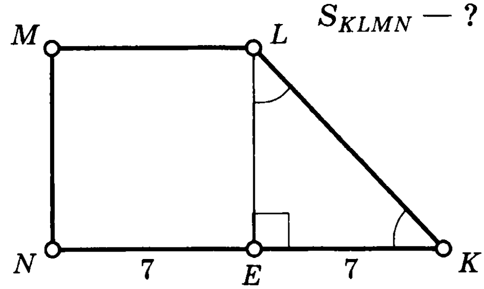
4

$AD \parallel BC$
S_{ABCD} — ?



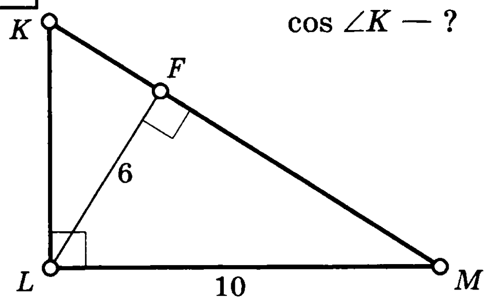
5

$ML \parallel NK$
S_{KLMN} — ?



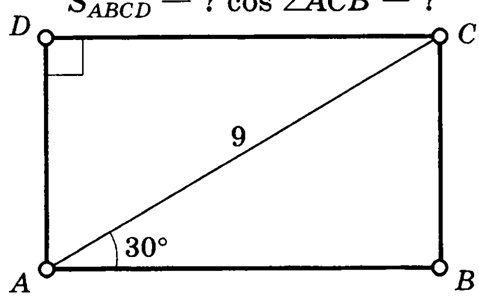
6

KL — ?
$\cos \angle K$ — ?



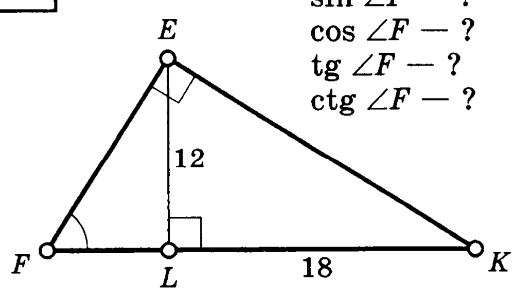
7

$ABCD$ — прямоугольник
S_{ABCD} — ? $\cos \angle ACB$ — ?



8

$\sin \angle F$ — ?
$\cos \angle F$ — ?
$\mathrm{tg}\, \angle F$ — ?
$\mathrm{ctg}\, \angle F$ — ?

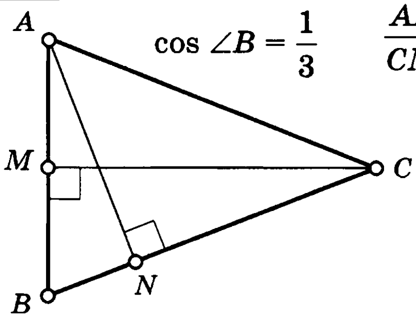


Продолжение табл. 19

9

$AC = BC$

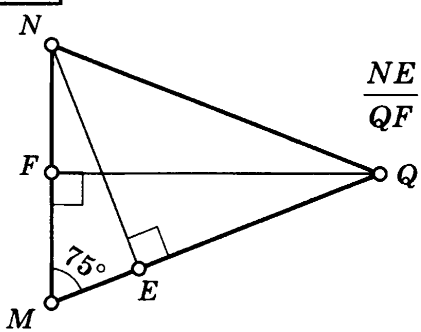
$\cos \angle B = \dfrac{1}{3}$ $\dfrac{AN}{CM}$ — ?



10

$NQ = MQ$

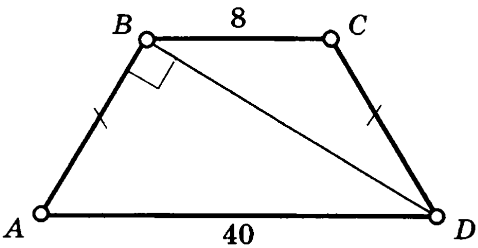
$\dfrac{NE}{QF}$ — ?



11

$ABCD$ — трапеция

S_{ABCD} — ?

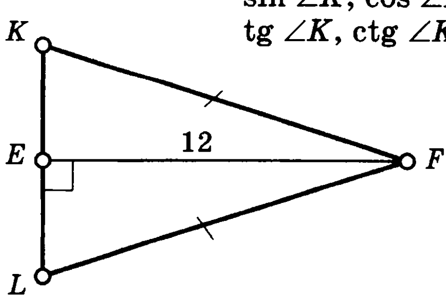


12

$KL = 8$

$\sin \angle K$, $\cos \angle K$

$\mathrm{tg}\, \angle K$, $\mathrm{ctg}\, \angle K$



13

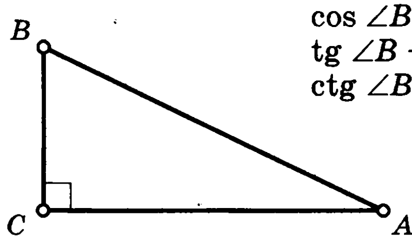
$AB = 5\ BC$

$\sin \angle B$ — ?

$\cos \angle B$ — ?

$\mathrm{tg}\, \angle B$ — ?

$\mathrm{ctg}\, \angle B$ — ?

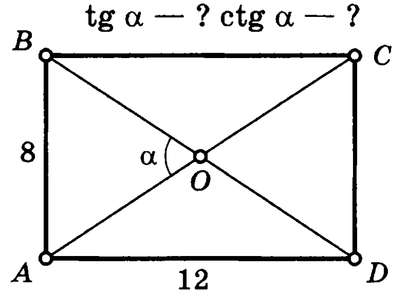


14

$ABCD$ — прямоугольник

$\sin \alpha$ — ? $\cos \alpha$ — ?

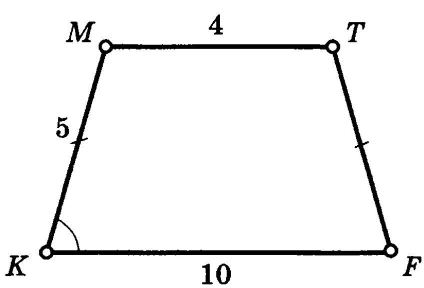
$\mathrm{tg}\, \alpha$ — ? $\mathrm{ctg}\, \alpha$ — ?



15

$KMTF$ — трапеция

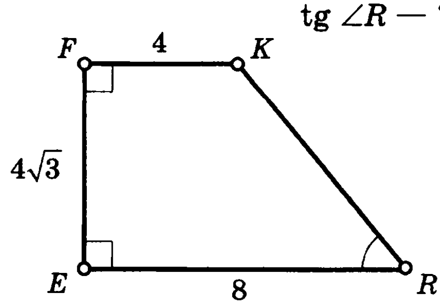
$\sin \angle K$ — ? $\cos \angle K$ — ?



16

$\sin \angle R$ — ?

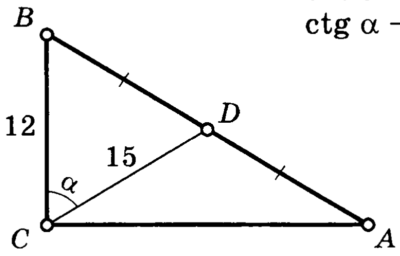
$\mathrm{tg}\, \angle R$ — ?



Окончание табл. 19

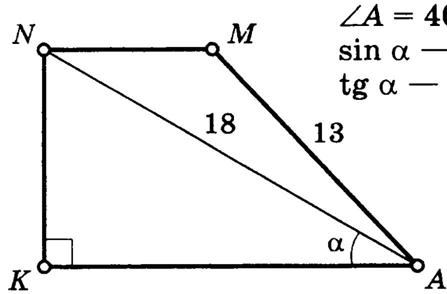
17

$\angle ACB = 90°$
$\cos\alpha$ — ?
$\operatorname{ctg}\alpha$ — ?



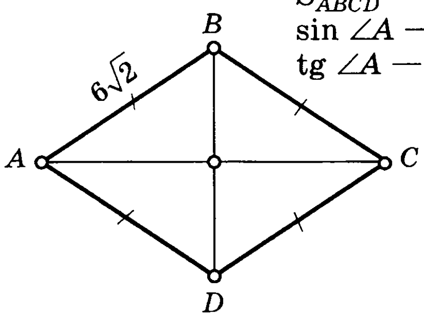
20

$AMNK$ — трапеция
$\angle A = 40°$
$\sin\alpha$ — ?
$\operatorname{tg}\alpha$ — ?



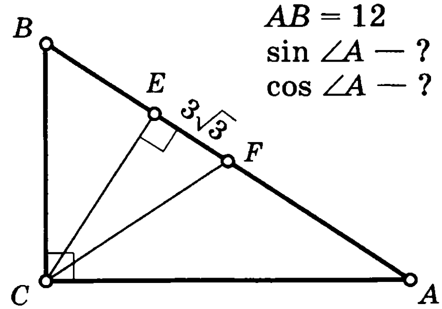
18

$S_{ABCD} = 12\sqrt{2}$
$\sin\angle A$ — ?
$\operatorname{tg}\angle A$ — ?



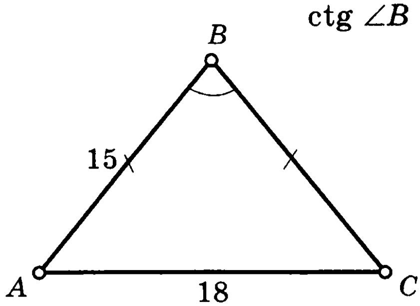
21

CF — медиана
$AB = 12$
$\sin\angle A$ — ?
$\cos\angle A$ — ?



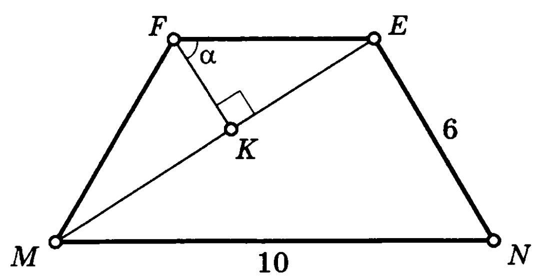
19

$\cos\angle B$ — ?
$\operatorname{ctg}\angle B$ — ?



22

$MNEF$ — трапеция
$ME = 8$, $\sin\alpha$ — ?

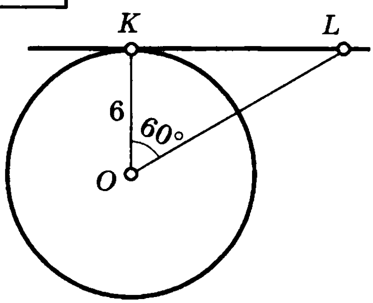


КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Таблица 20

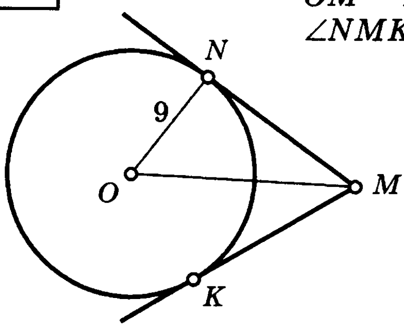
1

KL — ?



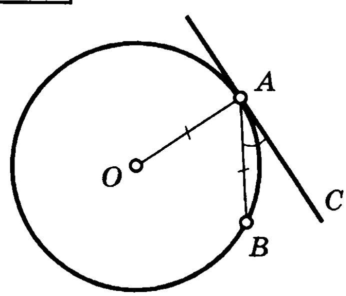
2

$OM = 18$
$\angle NMK$ — ?



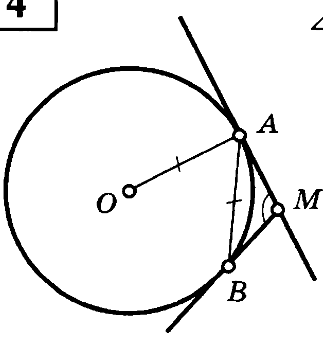
3

$\angle BAC$ — ?



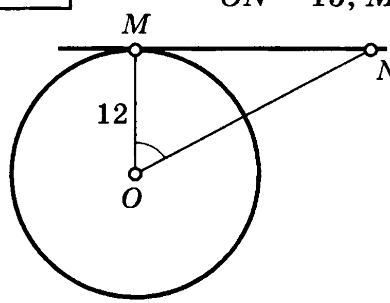
4

$\angle AMB$ — ?



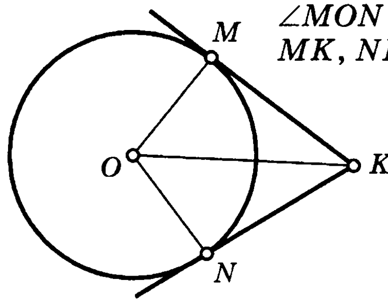
5

$ON = 15$, MN — ?



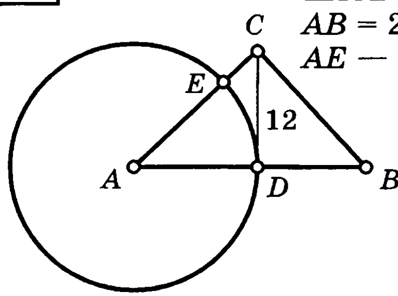
6

$OK = 6$
$\angle MON = 120°$
MK, NK — ?



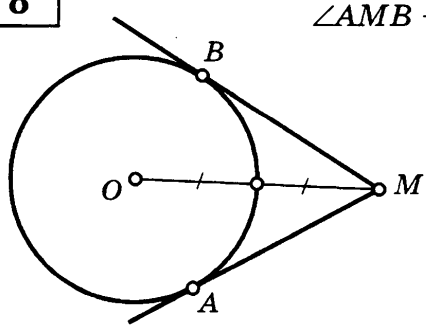
7

$\angle ACB = 90°$
$AB = 25$
AE — ?



8

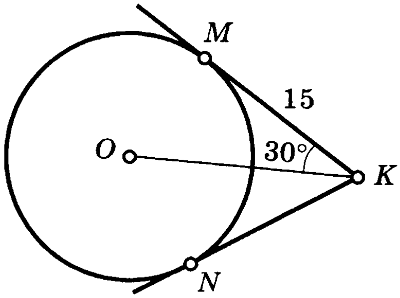
$\angle AMB$ — ?



Продолжение табл. 20

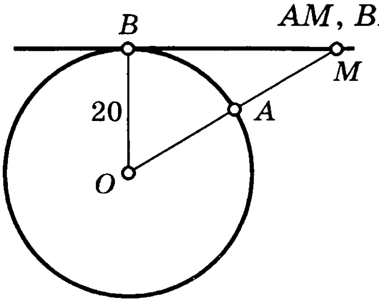
9

MN — ?



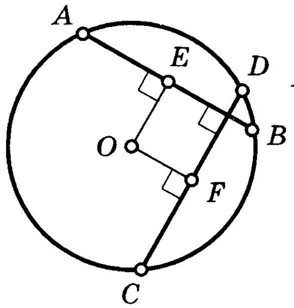
10

$OM = 30$
AM, BM — ?



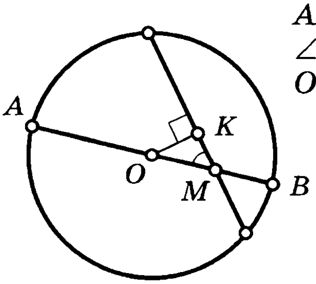
11

$AO = 10$
$OE = 8$
$OF = 6$
AB, CD — ?



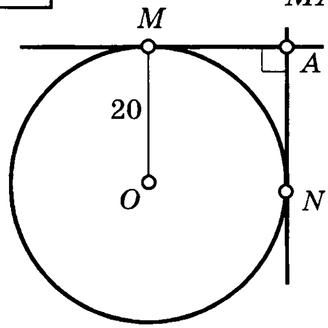
12

$MB = 4$
$AM = 12$
$\angle OMK = 30°$
OK — ?



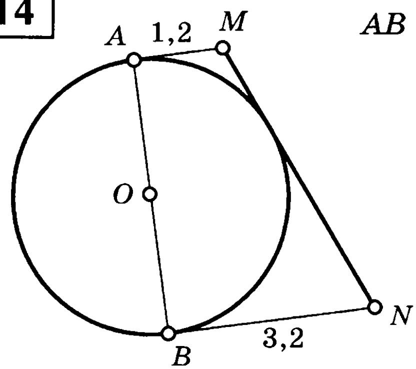
13

MA, NA — ?



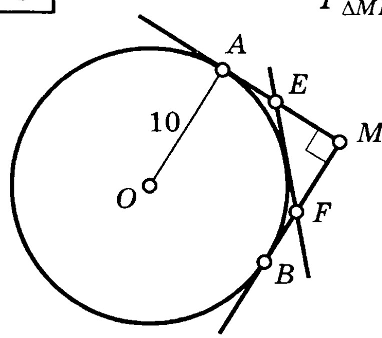
14

AB — ?



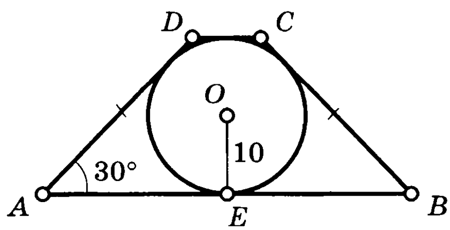
15

$P_{\Delta MEF}$ — ?



16

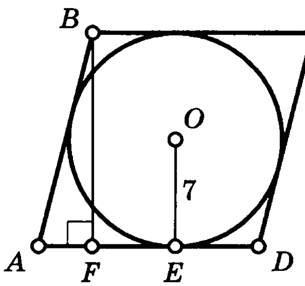
$ABCD$ — трапеция
AD, BC — ?



Окончание табл. 20

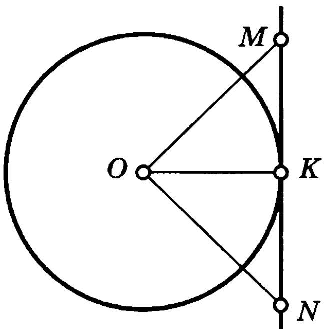
17

$ABCD$ — ромб
BF — ?



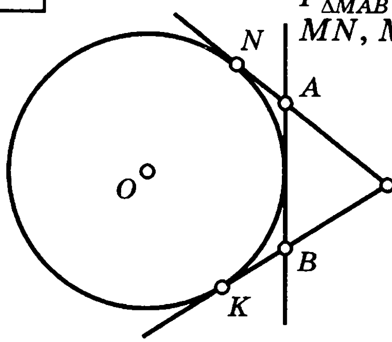
18

$OM = ON = 10$
$MN = 16$
OK — ?



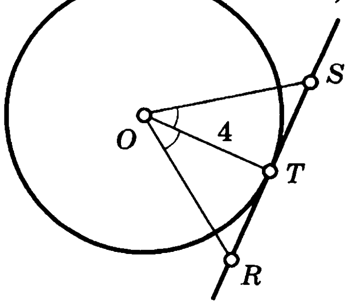
19

$P_{\Delta MAB} = 48$
MN, MK — ?



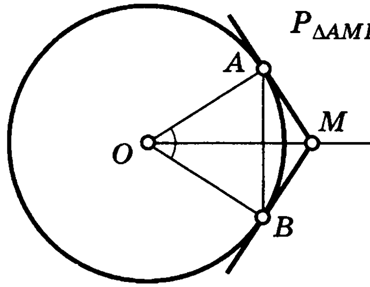
20

$RS = 15$
OS, OR — ?



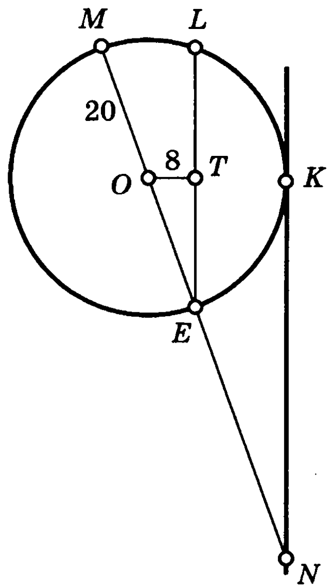
21

$OM = 24$
$\angle AOB = 60°$
$P_{\Delta AMB}$ — ?



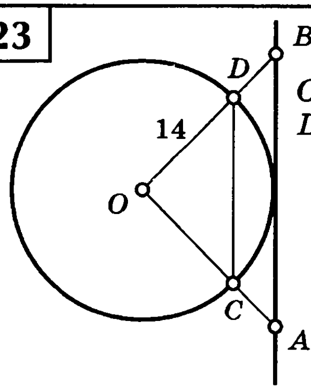
22

$EL \parallel NK$
MN — ?



23

$OA = OB = 20$
DC — ?

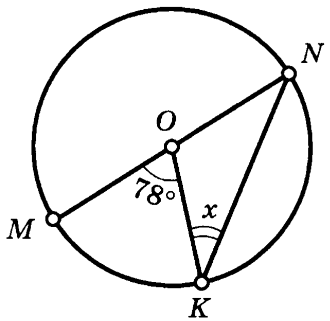


ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

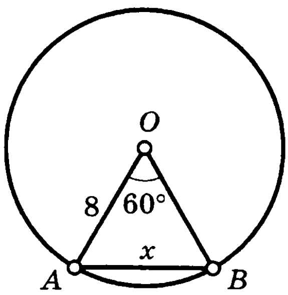
Таблица 21

Найдите x.

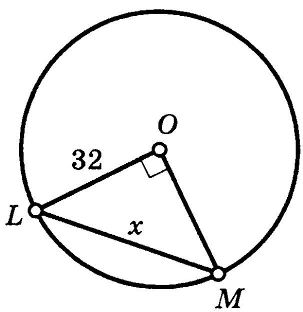
1



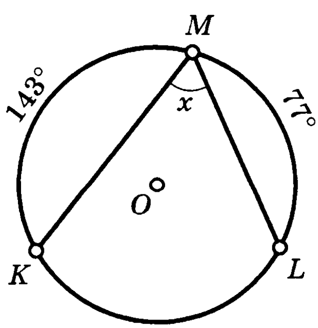
2



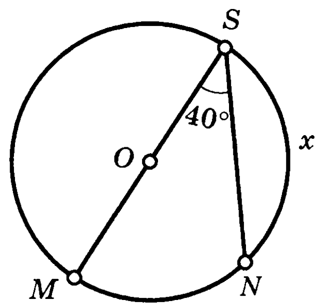
3



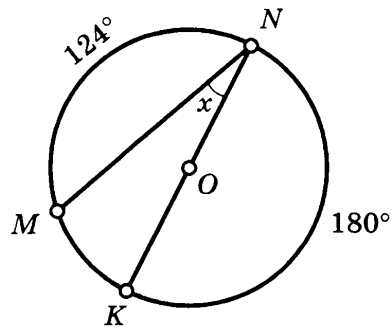
4



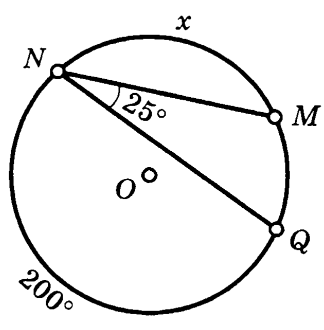
5



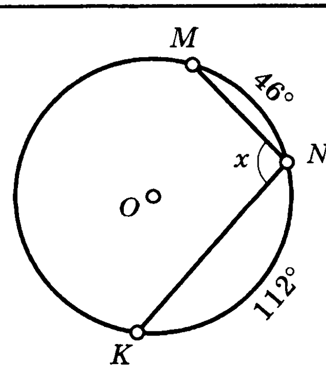
6



7

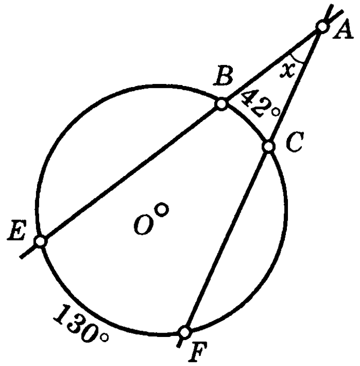


8

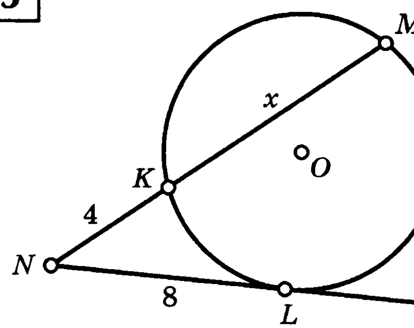


Продолжение табл. 21

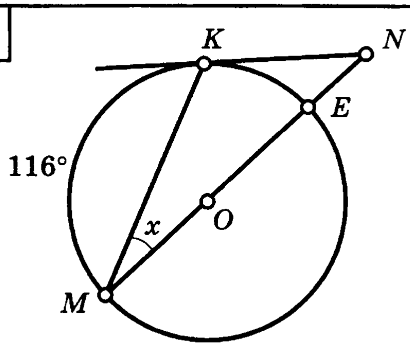
9



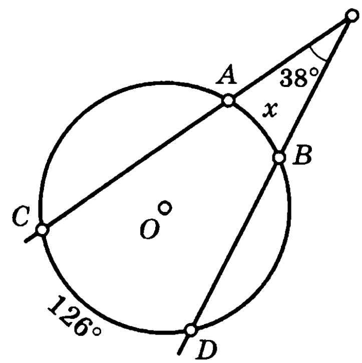
13



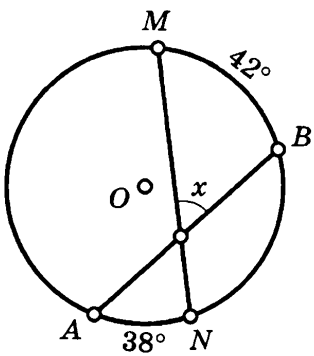
10



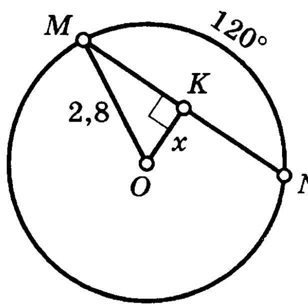
14



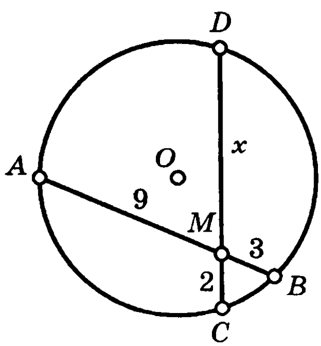
11



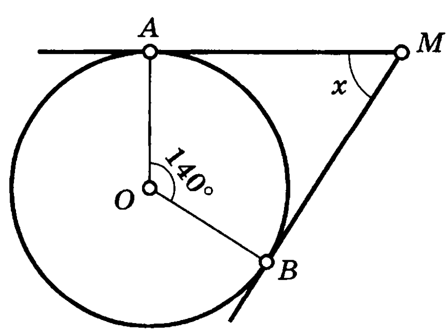
15



12

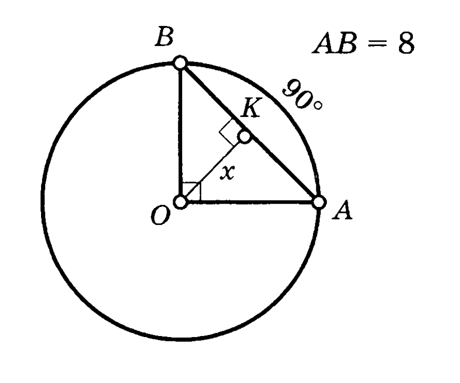


16

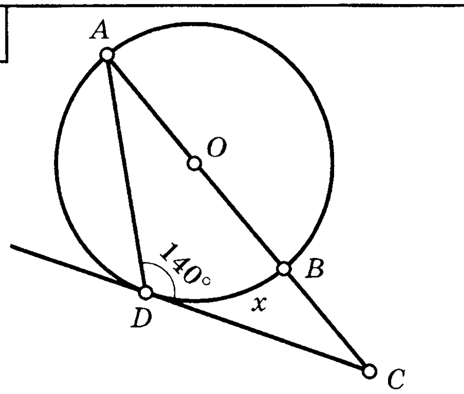


Продолжение табл. 21

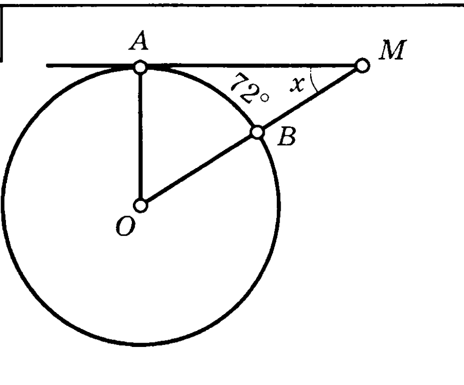
17



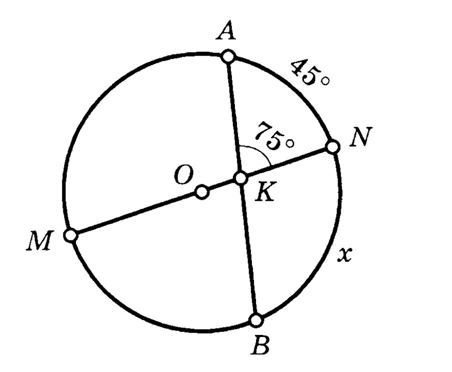
21



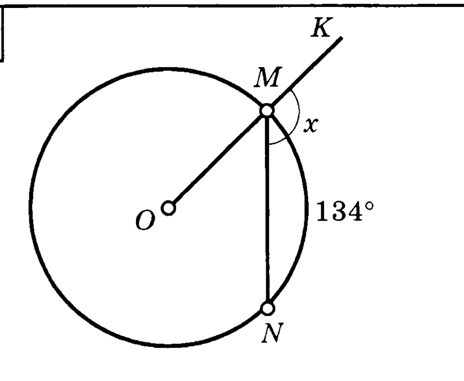
18



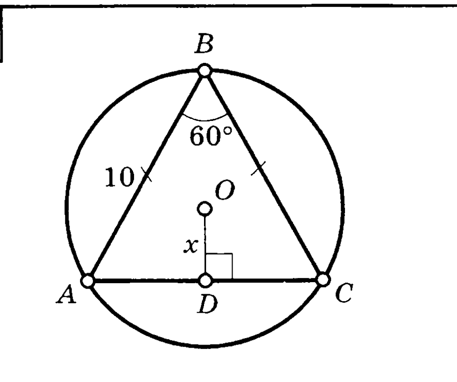
22



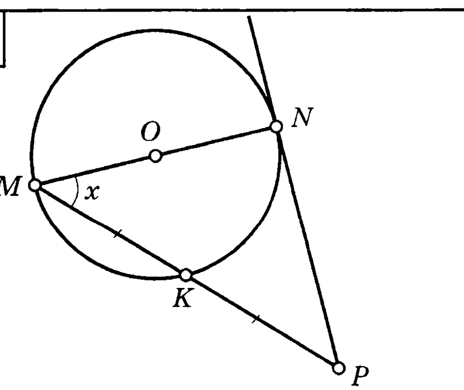
19



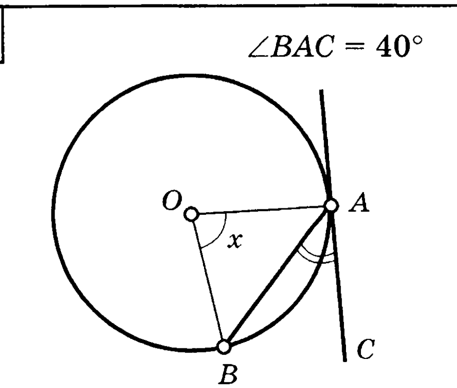
23



20



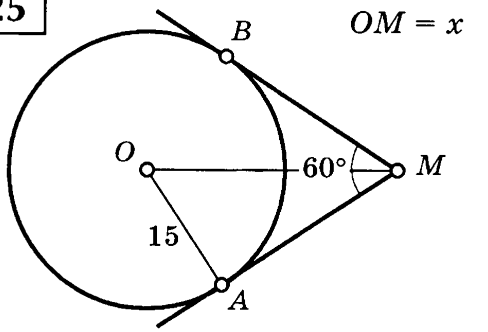
24



Продолжение табл. 21

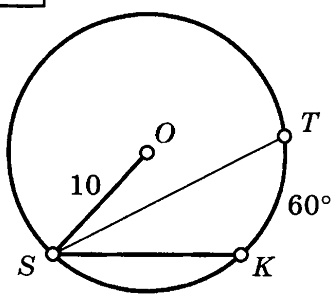
25

$OM = x$

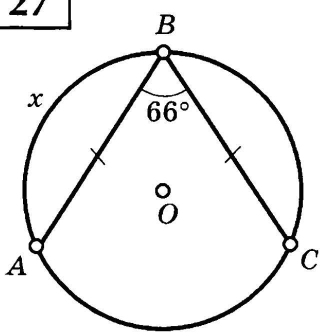


26

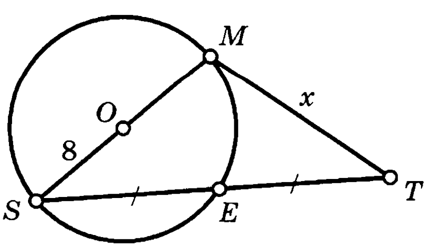
$TK = x$



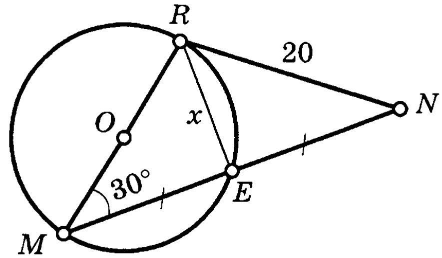
27



28

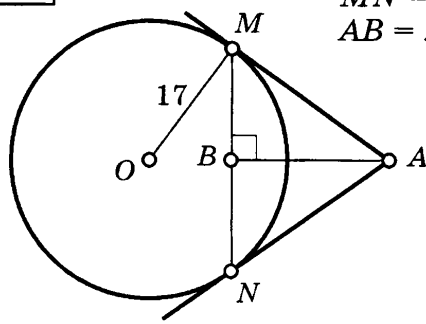


29

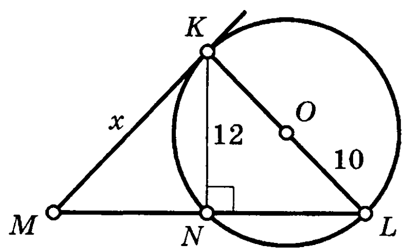


30

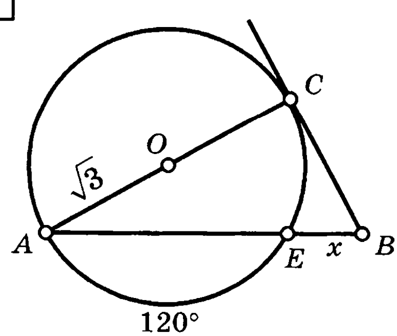
$MN = 30$
$AB = x$



31

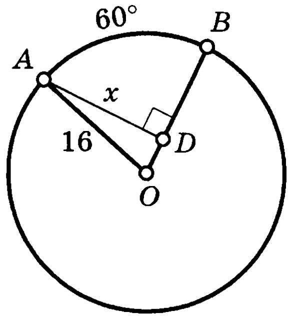


32



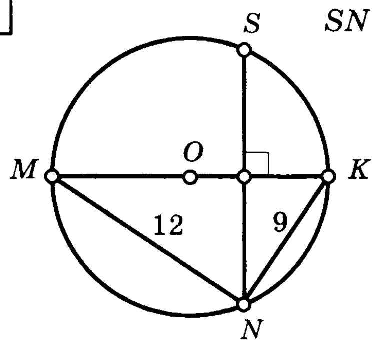
Продолжение табл. 21

33

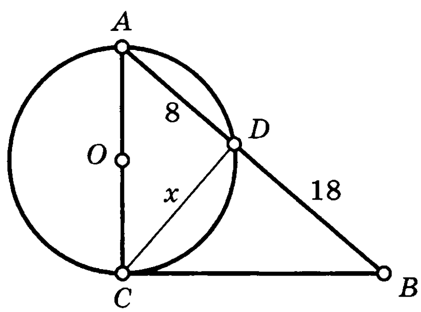


34

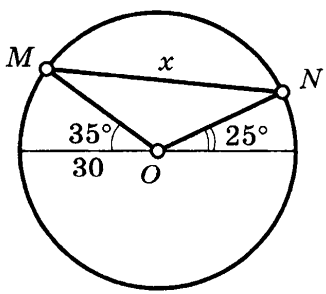
$SN = x$



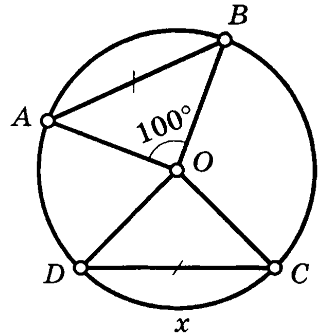
35



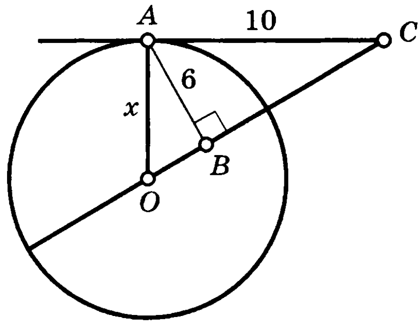
36



37

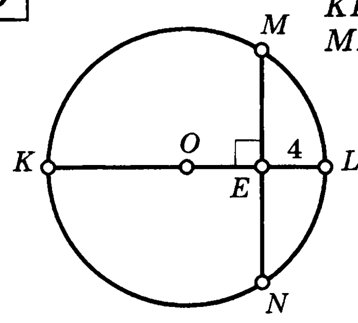


38



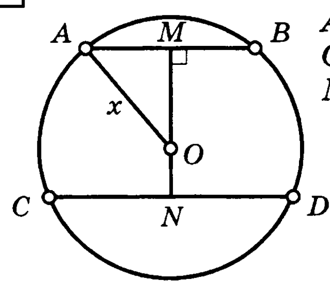
39

$KE = 12$
$MN = x$

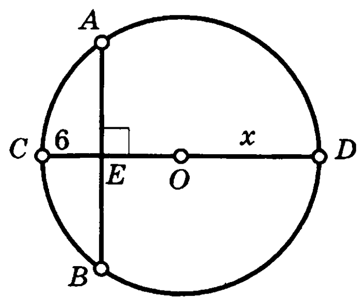
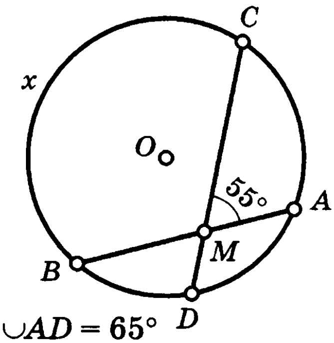
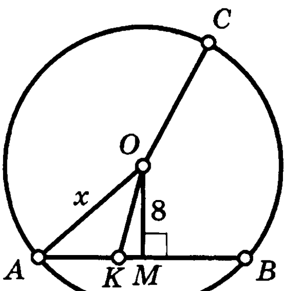
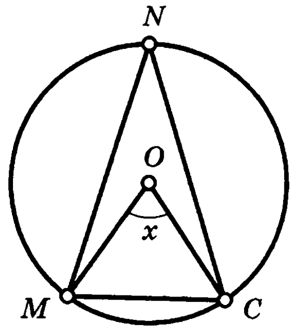
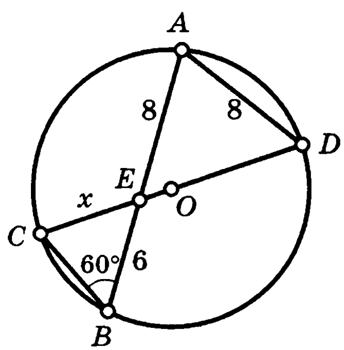
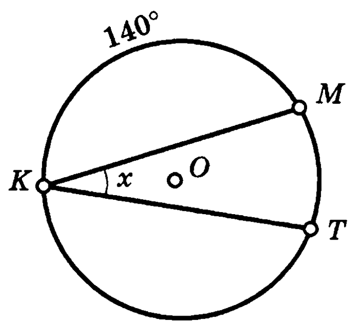
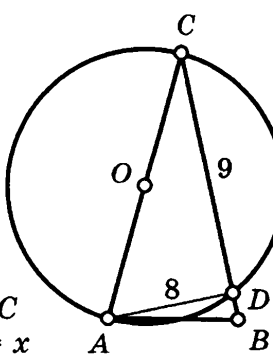
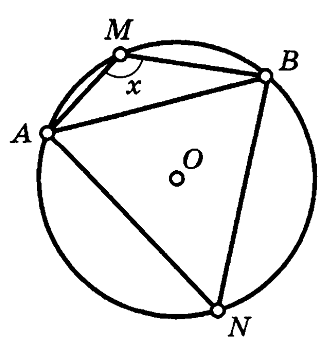


40

$AB \parallel CD$
$AB = 12$
$CD = 16$
$MN = 14$

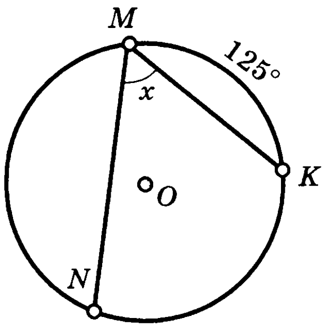


Продолжение табл. 21

41  $AB + CE = CD$	**45**  $\cup CB - \cup AD = 65°$
42  $AK = OK = 10$	**46**  $\angle NMC = 75°$, $\cup NM : \cup MC = 2 : 1$
43 	**47**  $\cup KT : \cup TM = 7 : 4$
44  $AC = BC$ $S_{\Delta ABC} = x$	**48**  $\cup AMB : \cup ANB = 5 : 11$

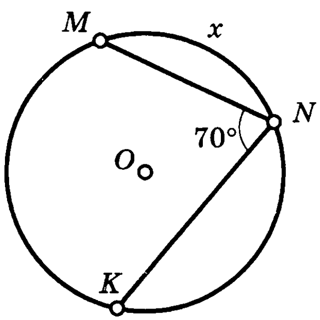
Окончание табл. 21

49



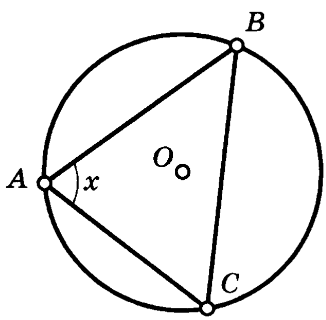
$\smile MN : \smile NK = 31 : 16$

50



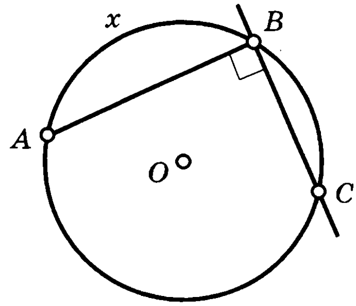
$\smile NM : \smile NK = 20 : 24$

51



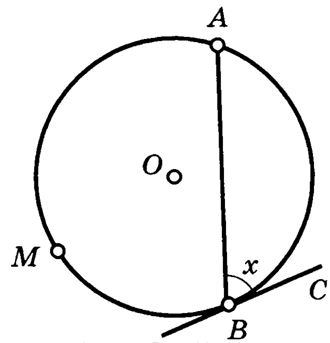
$\smile AB : \smile BC : \smile AC = 7 : 11 : 6$

52



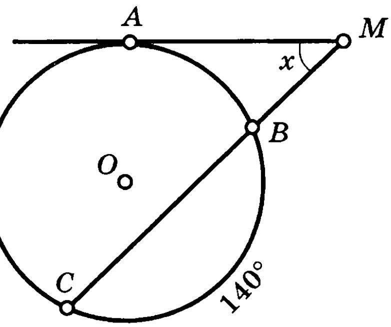
$\smile BC : \smile CA = 2 : 5$

53



$\smile AB : \smile BMA = 3 : 5$

54

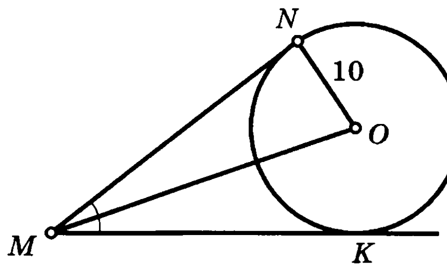


$\smile AB : \smile CA = 10 : 12$

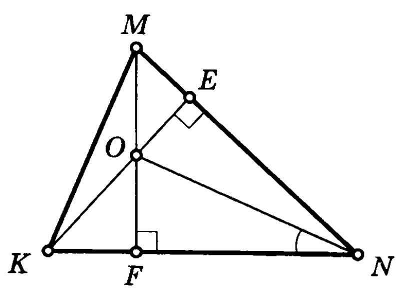
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 22

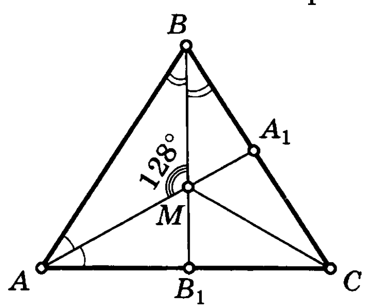
1 $\angle NMK = 60°$, MO — ?



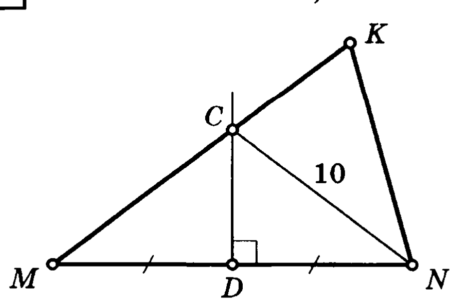
2 $\angle MKN = 66°$, $\angle FNO$ — ?



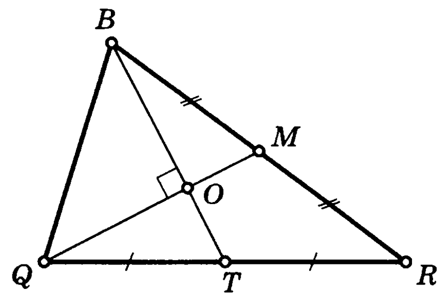
3 $\angle MCB_1$ — ?



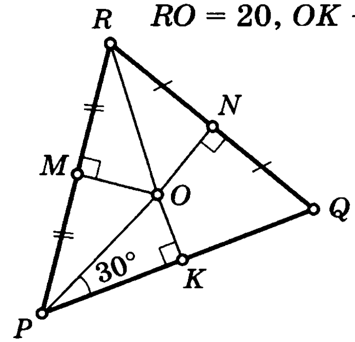
4 $MK = 17$, CK — ?



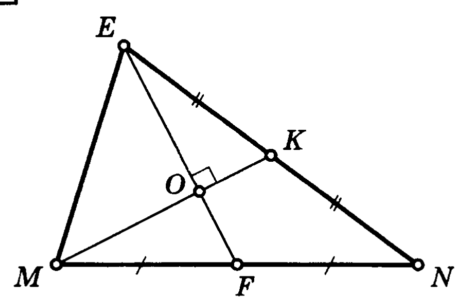
5 $QM = 9$, $BT = 12$, $S_{\Delta BOQ}$ — ?



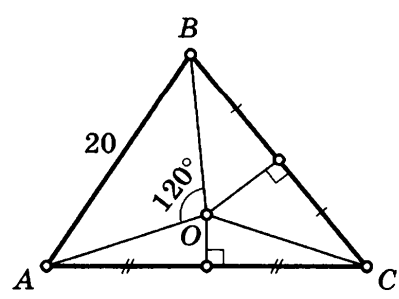
6 $RO = 20$, OK — ?



7 $EF = 18$, $MK = 15$, ON — ?



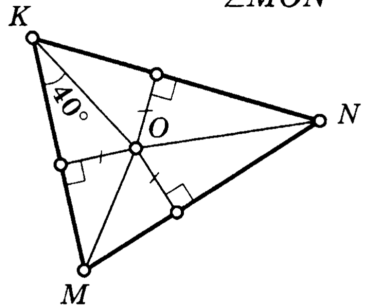
8 OC — ?



Продолжение табл. 22

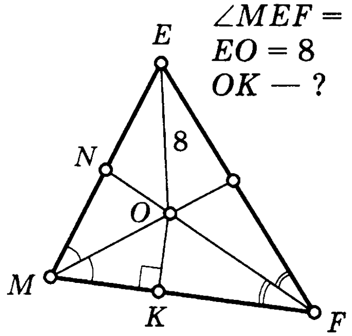
9

$\angle MON$ — ?



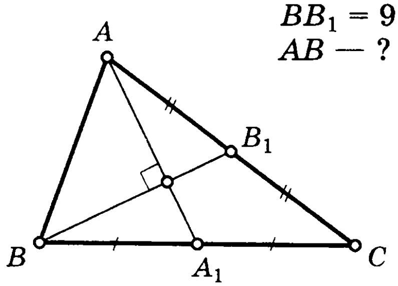
10

$\angle MEF = 60°$
$EO = 8$
OK — ?



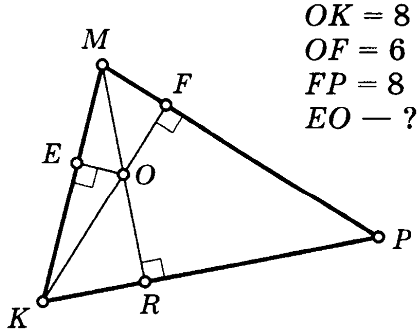
11

$AA_1 = 12$
$BB_1 = 9$
AB — ?



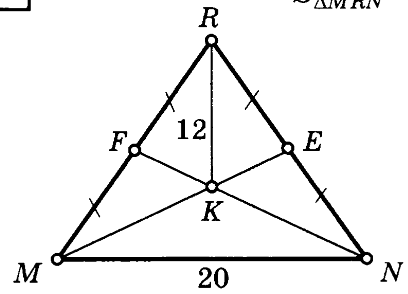
12

$OK = 8$
$OF = 6$
$FP = 8$
EO — ?



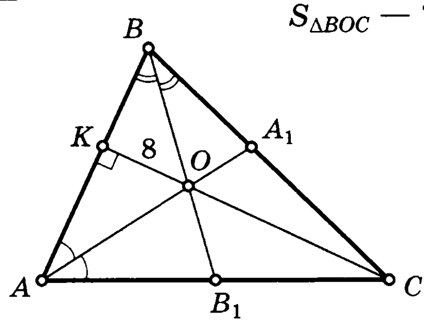
13

$S_{\Delta MRN}$ — ?



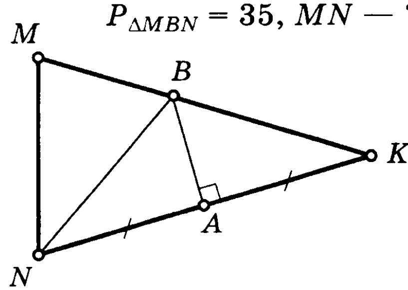
14

$BC = 20$
$S_{\Delta BOC}$ — ?



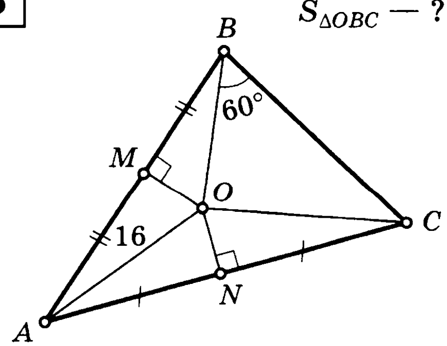
15

$MK = NK = 20$
$P_{\Delta MBN} = 35$, MN — ?



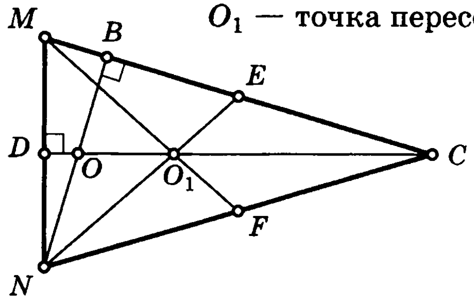
16

$S_{\Delta OBC}$ — ?



Окончание табл. 22

17



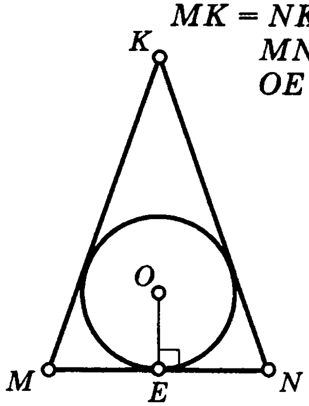
O — точка пересечения высот
O_1 — точка пересечения медиан
$MC = NC = 26$
$MN = 20$
OO_1 — ?

ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

Таблица 23

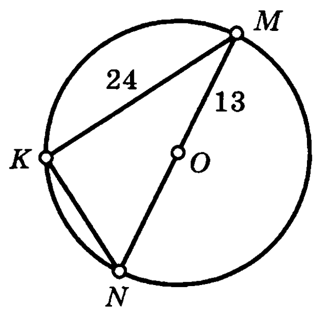
1

$MK = NK = 26$
$MN = 20$
OE — ?



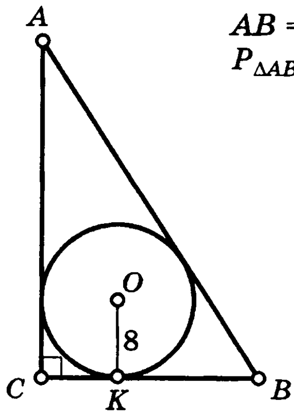
3

$P_{\Delta KMN}$ — ?



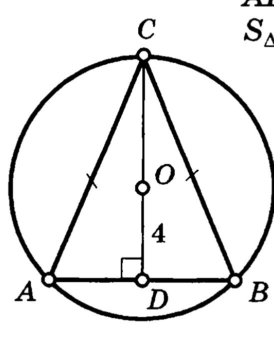
2

$AB = 52$
$P_{\Delta ABC}$ — ?



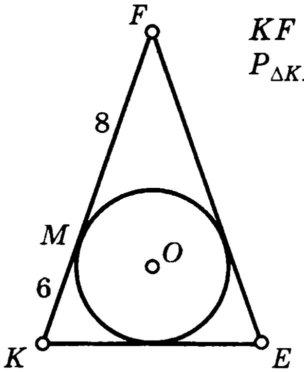
4

$AB = 6$
$S_{\Delta ABC}$ — ?



Продолжение табл. 23

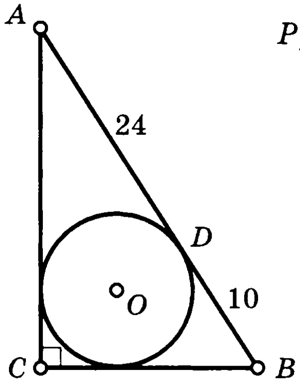
5



$KF = EF$

$P_{\triangle KFE}$ — ?

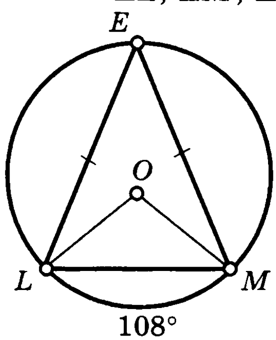
6



$P_{\triangle ABC}$ — ?

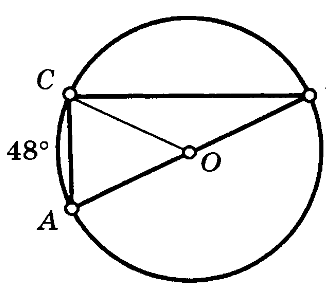
7

$\angle L$, $\angle M$, $\angle E$ — ?

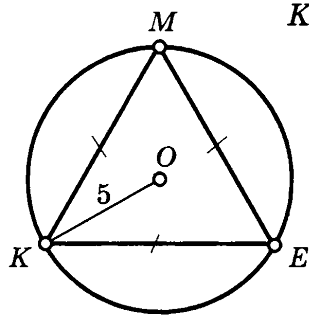


8

$\angle A$, $\angle B$, $\angle ACB$ — ?



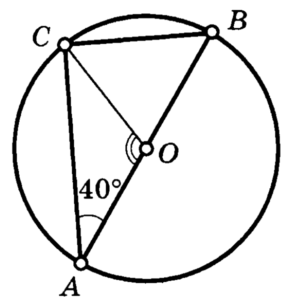
9



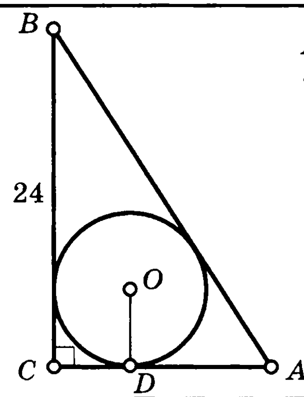
KE — ?

10

$\angle AOC$ — ?



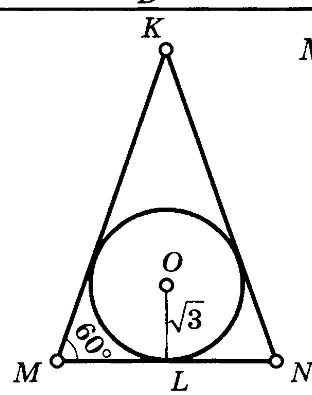
11



$AC = 10$

OD — ?

12

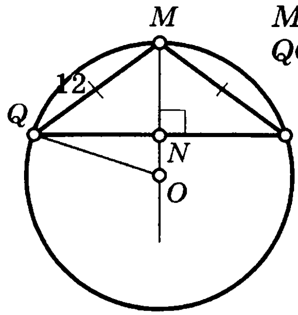


MN — ?

Продолжение табл. 23

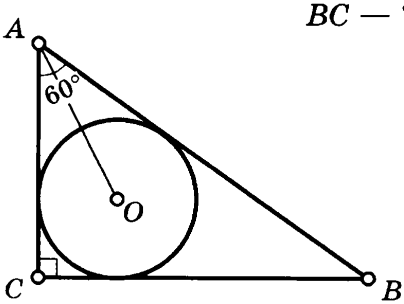
13

$MN = 8$
QO — ?



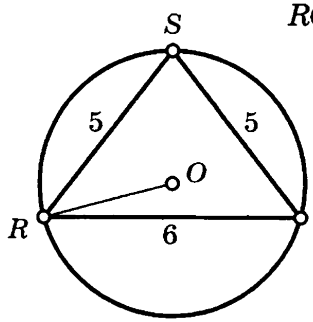
14

$AO = 20$
BC — ?



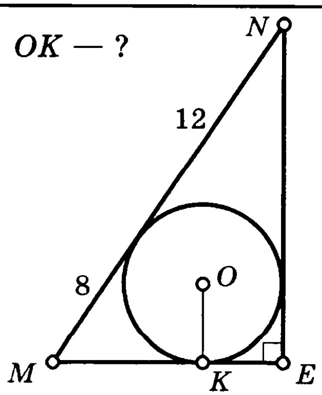
15

RO — ?



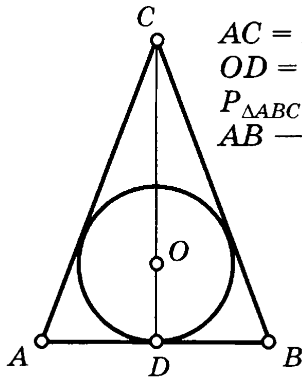
16

OK — ?



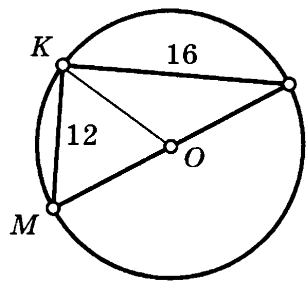
17

$AC = BC$
$OD = 0{,}4\ CD$
$P_{\Delta ABC} = 40$
AB — ?



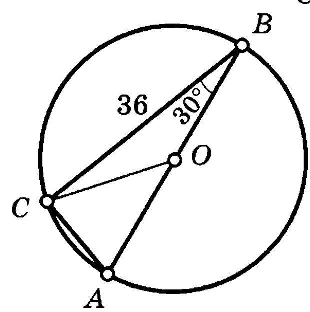
18

KO — ?



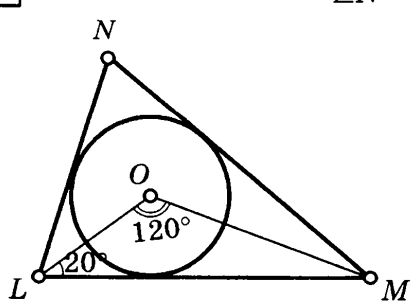
19

CO — ?



20

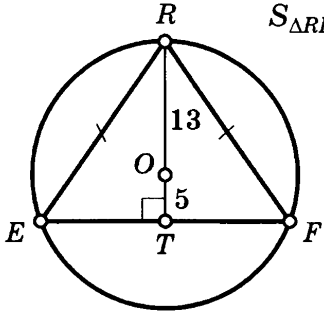
$\angle N$ — ?



Продолжение табл. 23

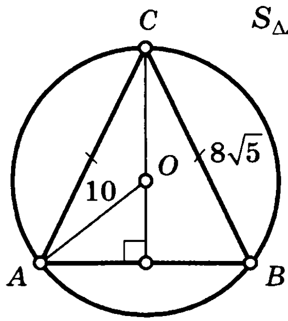
21

$S_{\Delta REF}$ — ?



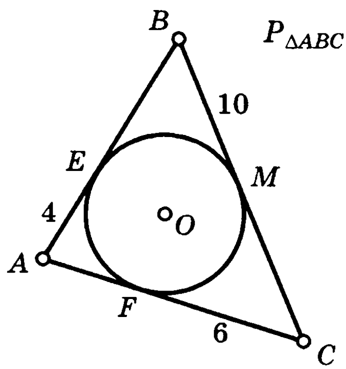
22

$S_{\Delta ABC}$ — ?



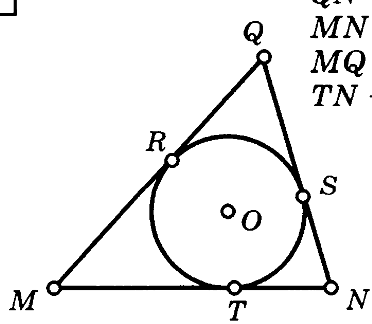
23

$P_{\Delta ABC}$ — ?



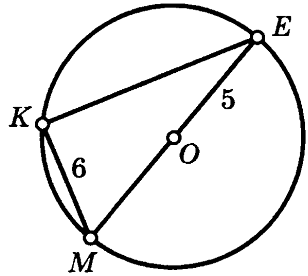
24

$QN = 10$
$MN = 20$
$MQ = 24$
TN — ?



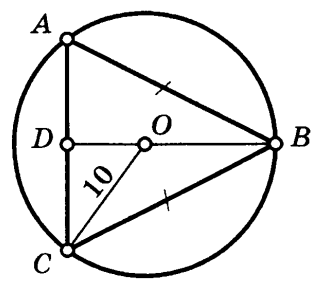
25

KE — ?



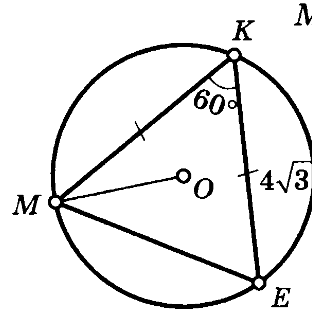
26

$AB = BC = AC$, BD — ?



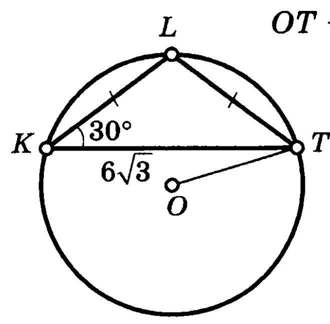
27

MO — ?



28

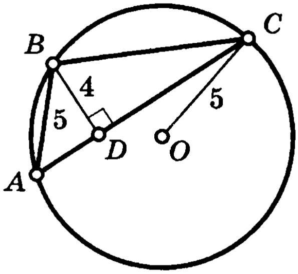
OT — ?



Продолжение табл. 23

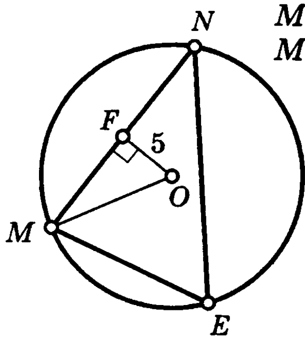
29

BC — ?



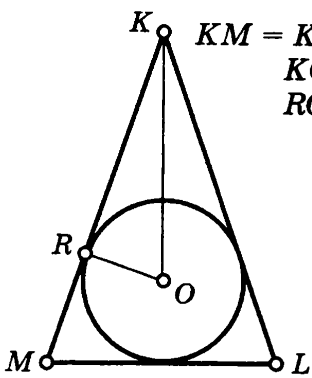
30

$MN = 24$
MO — ?



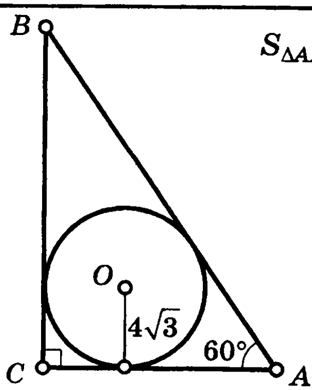
31

$KM = KL = 20$
$KO = 10$
RO — ?



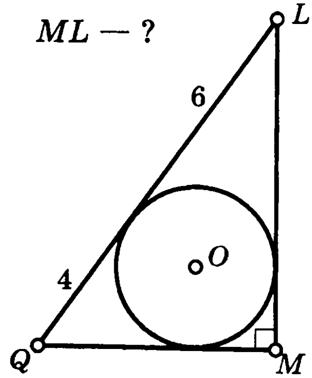
32

$S_{\Delta ABC}$ — ?



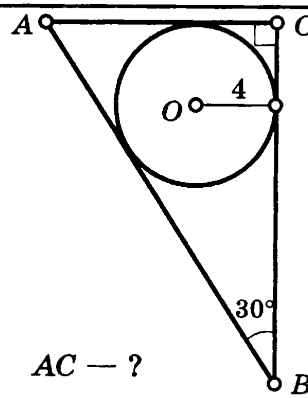
33

ML — ?



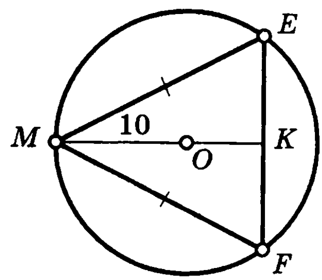
34

AC — ?



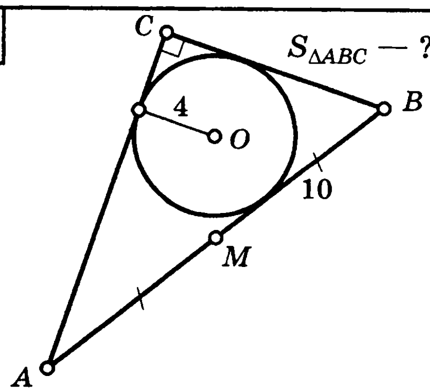
35

$MK = 16$, ME, EF — ?



36

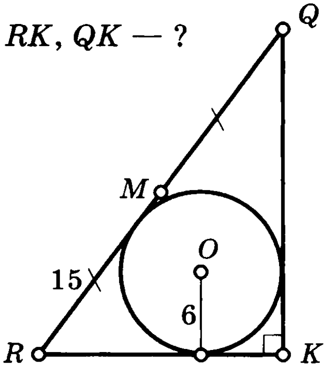
$S_{\Delta ABC}$ — ?



Продолжение табл. 23

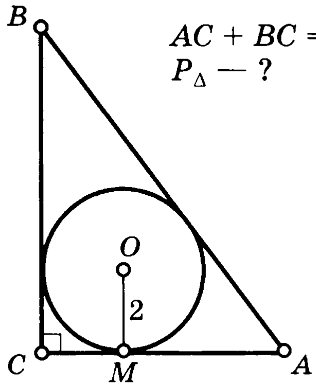
37

RK, QK — ?

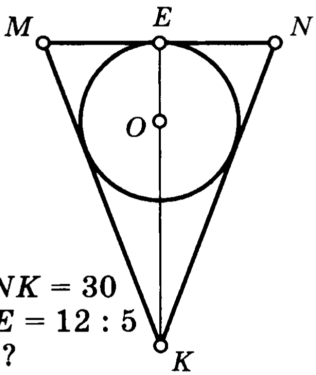


38

$AC + BC = 17$
P_Δ — ?



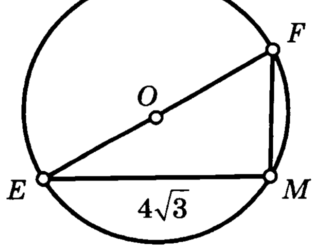
39



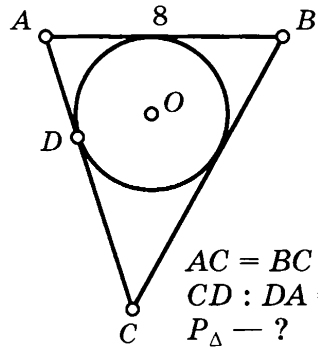
$MK = NK = 30$
$KO : OE = 12 : 5$
MN — ?

40

EO — ? $\angle E : \angle F = 1 : 2$



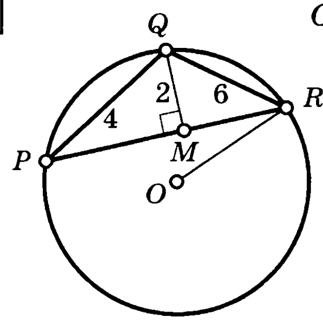
41



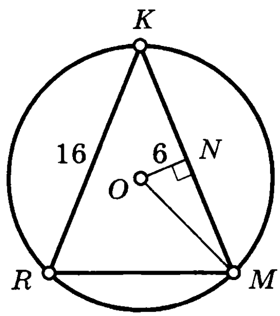
$AC = BC$
$CD : DA = 3 : 2$
P_Δ — ?

42

OR — ?

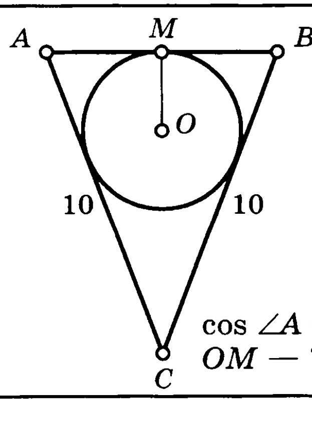


43



$KR = KM = 16$, OM — ?

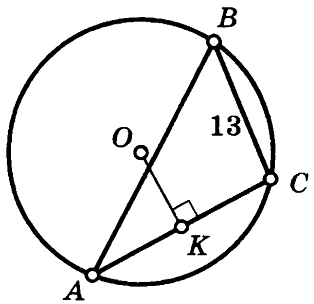
44



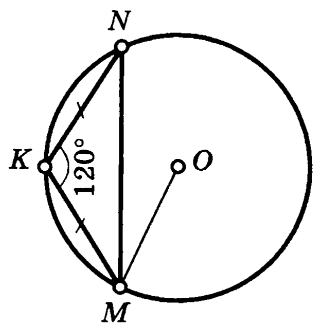
$\cos \angle A = 0{,}6$
OM — ?

Продолжение табл. 23

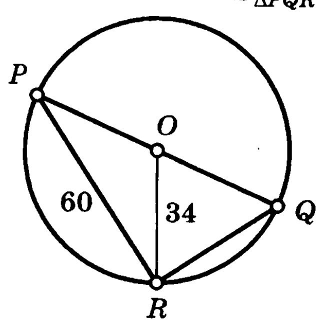
45 $OK = 12$, $AC = 20$, $\sin\angle A$ — ?



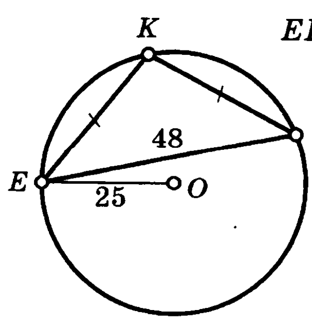
46 $KM = KN = 16$, MO — ?



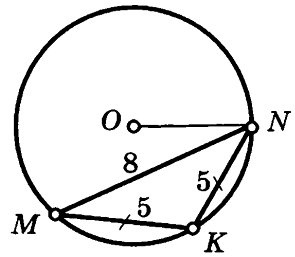
47 $S_{\Delta PQR}$ — ?



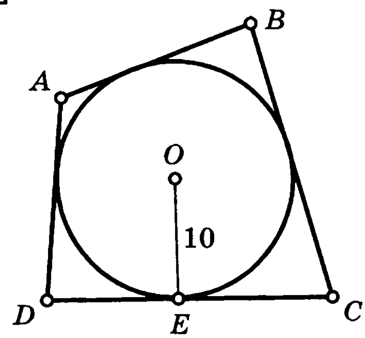
48 EK — ?



49 ON — ?

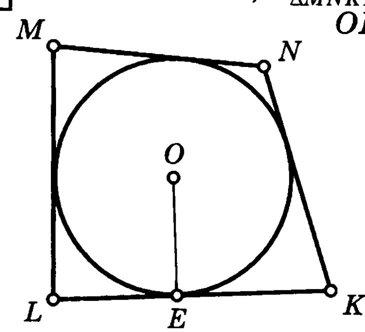


50 $AB + DC = 24$, $S_{\Delta ABCD}$ — ?

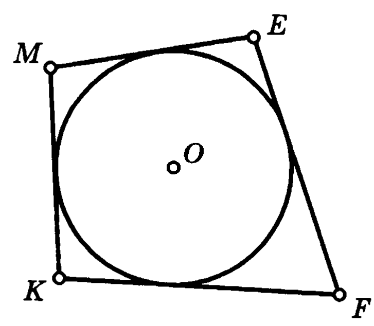


51 $MN + LK = 20$, $S_{\Delta MNKL} = 24$

OE — ?



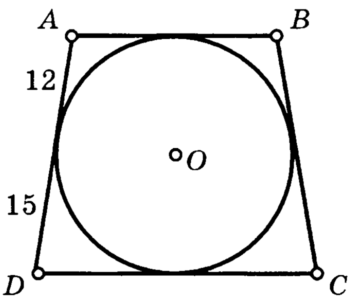
52 $MK + EF = 40$, P_{MEFK} — ?



Продолжение табл. 23

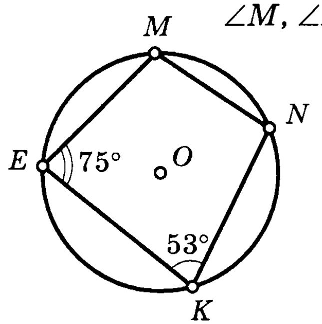
53

$AD = BC$, AB, DC — ?



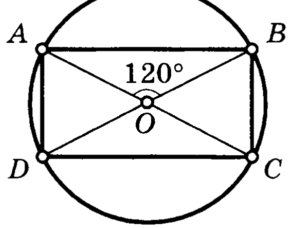
54

$\angle M$, $\angle N$ — ?



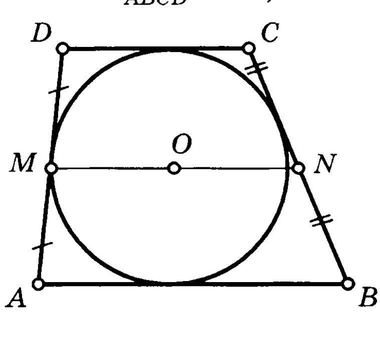
55

$ABCD$ — прямоугольник
$AD = 10$, AO — ?



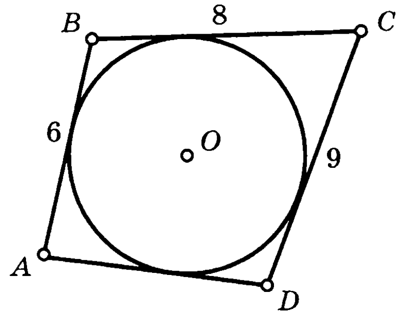
56

$P_{ABCD} = 48$, MN — ?



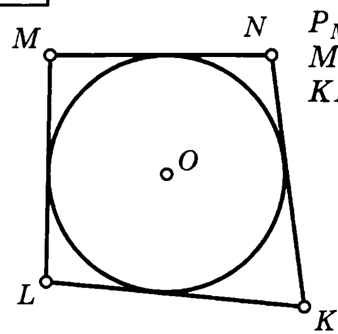
57

P_{ABCD} — ?



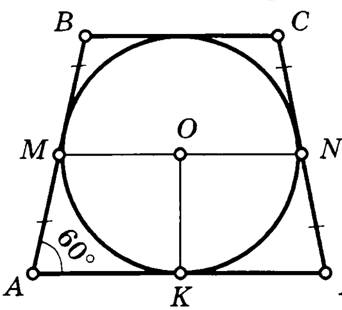
58

$MN : NK : KL = 2 : 6 : 7$
$P_{MNKL} = 54$
MN, NK,
KL, LM — ?



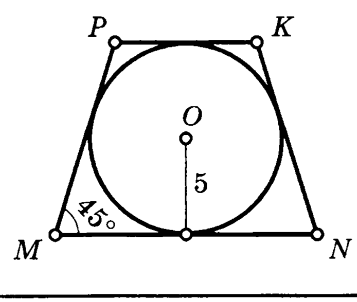
59

$ABCD$ — трапеция
$MN = 20$ — средняя линия
OK — ?



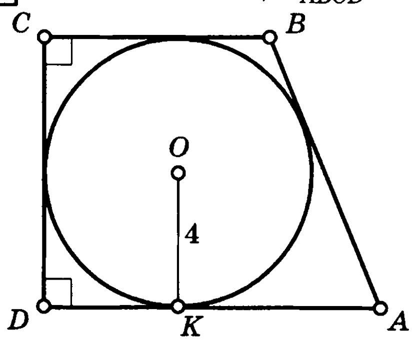
60

$MNKP$ — трапеция
$MP = NK$, S_{MNKP} — ?

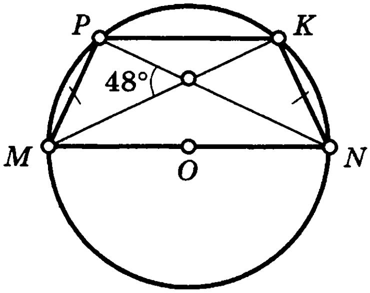


Продолжение табл. 23

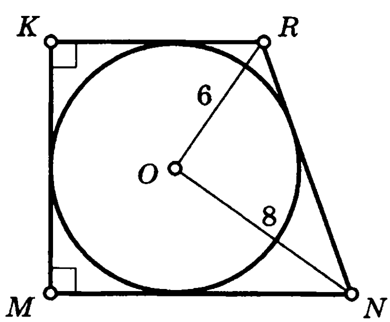
61 $AD - BC = 6$, P_{ABCD} — ?



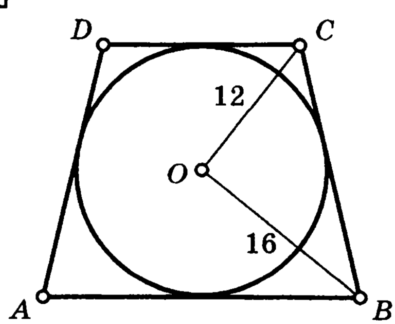
62 $MNKP$ — трапеция
$\angle M$, $\angle N$, $\angle K$, $\angle P$ — ?



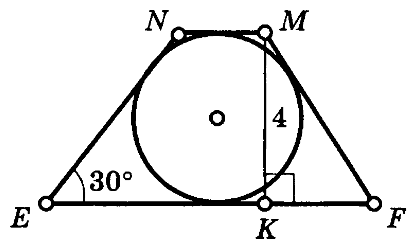
63 S_{MNRK} — ?



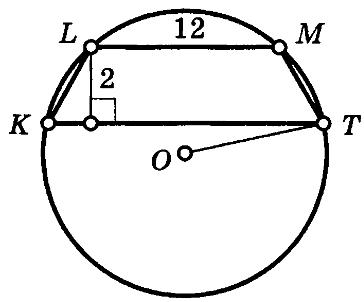
64 $AD = BC$, S_{ABCD} — ?



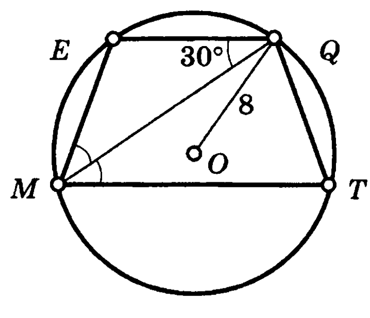
65 $EFMN$ — трапеция
$NE = MF$
$EF + MN$ — ?



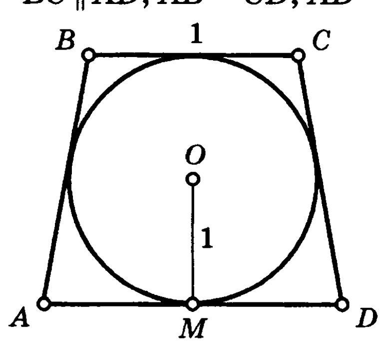
66 $LM \parallel KT$, $KT = 16$, OT — ?



67 $EQ \parallel MT$, S_{MTQE} — ?



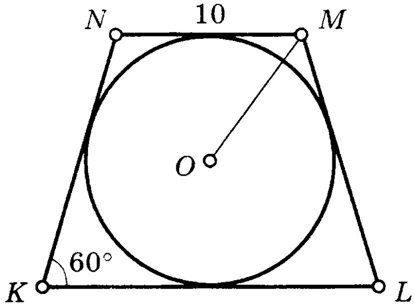
68 $BC \parallel AD$, $AB = CD$, AD — ?



Продолжение табл. 23

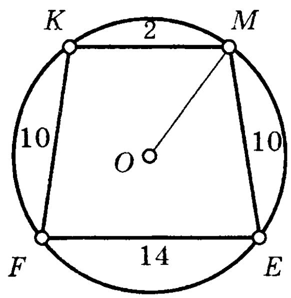
69

$MN \parallel KL$, $KN = NM = ML = 10$, MO — ?



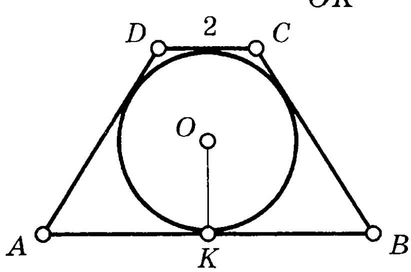
70

$KM \parallel FE$, MO — ?



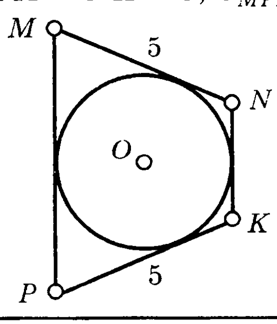
71

$ABCD$ — трапеция
$AD = BC$, $AB = 18$
OK — ?



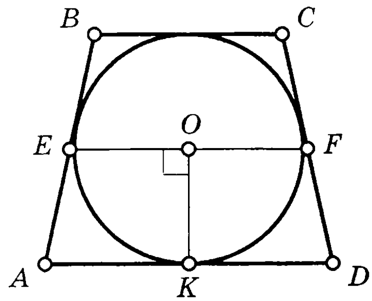
72

$MP \parallel NK$, $MN = PK$
$MP - NK = 6$, S_{MPKN} — ?



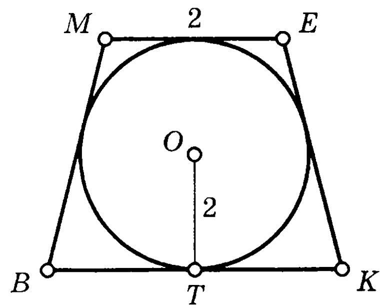
73

$BC \parallel AD$, $AB = CD$, $EF = 8$
$OK = 5$, S_{ABCD} — ?



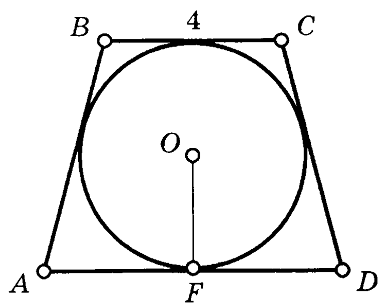
74

$ME \parallel BK$, $MB = EK$
S_{MEKB} — ?



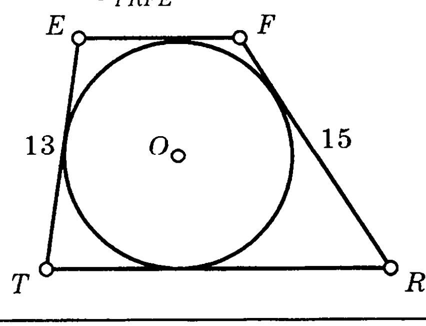
75

$AD \parallel BC$, $AB = CD$
$AD = 9$, OF — ?



76

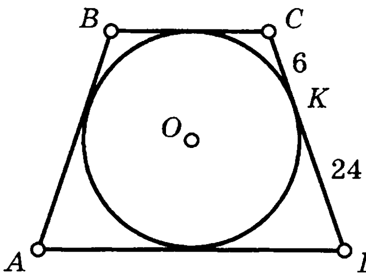
$EF \parallel TR$, $TR - EF = 14$
S_{TRFE} — ?



Продолжение табл. 23

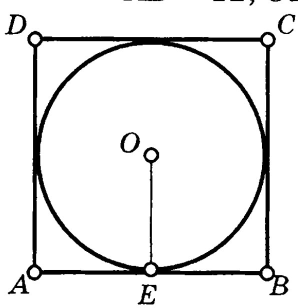
77

$AB = CD$, $BC \parallel AD$
S_{ABCD} — ?



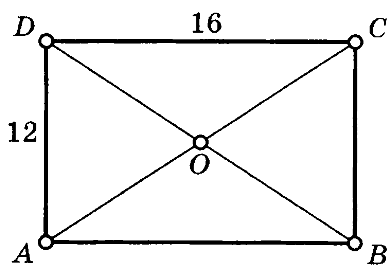
78

$ABCD$ — квадрат
$AB = 12$, OE — ?



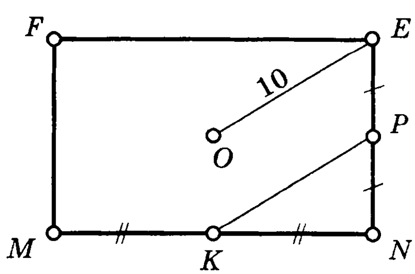
79

$ABCD$ — прямоугольник
AO — ?



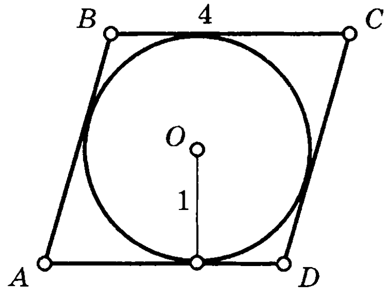
80

$MNFE$ — прямоугольник
KP — ?



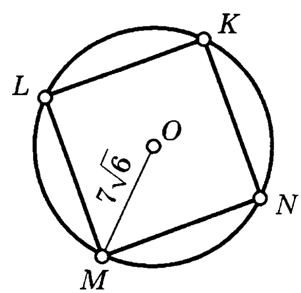
81

$ABCD$ — ромб
$\angle A$ — ?



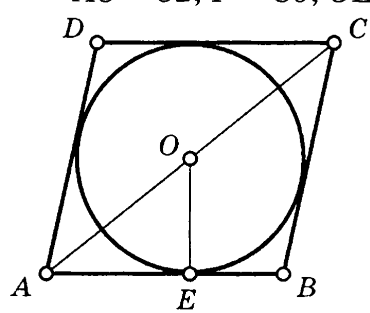
82

$MNKL$ — ромб
S_{MNKL} — ?



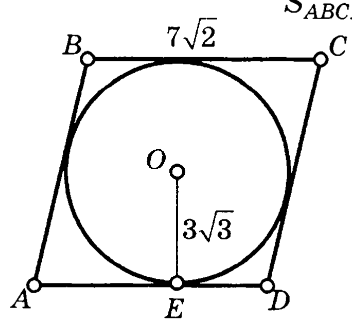
83

$ABCD$ — ромб
$AC = 32$, $P = 80$, OE — ?



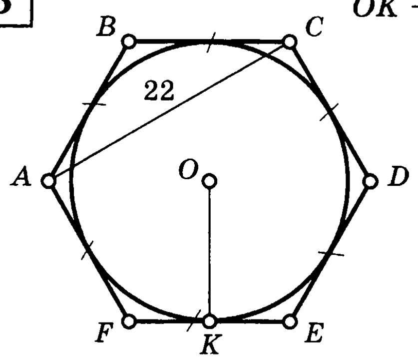
84

$AB = CD$, $BC = AD$
S_{ABCD} — ?

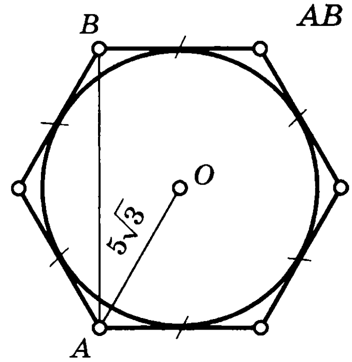


Окончание табл. 23

85 OK — ?



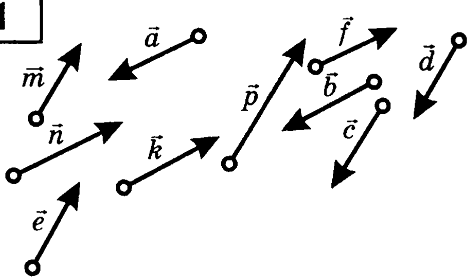
86 AB — ?



ВЕКТОРЫ

Таблица 24

1



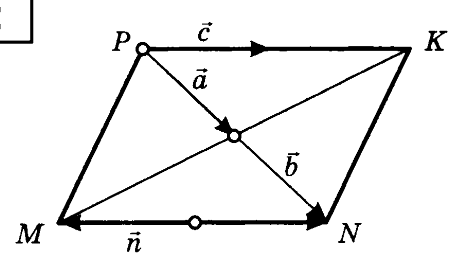
Укажите векторы:

а) сонаправленные с вектором $\vec{m}$;

б) сонаправленные с вектором $\vec{n}$;

в) противоположно направленные с $\vec{m}$ и $\vec{n}$

2



$MNKP$ — параллелограмм

Укажите векторы:

а) коллинеарные;

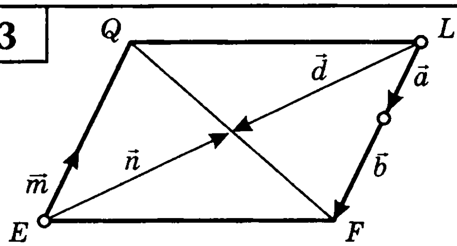
б) сонаправленные;

в) противоположные;

г) равные

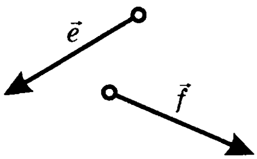
Продолжение табл. 24

3



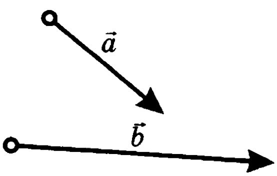
EFQL — параллелограмм
Укажите векторы:
а) коллинеарные; б) сонаправленные; в) противоположные; г) равные

4



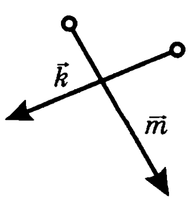
Постройте вектор $\vec{e} + \vec{f}$ двумя способами

5



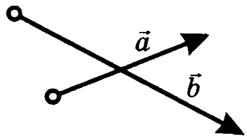
Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b}$ двумя способами

6



Постройте вектор $\vec{k} - \vec{m}$

7



Постройте вектор $\vec{b} - \vec{a}$

8

A, *B*, *C*, *D*, *E* — произвольные точки.
Найдите сумму

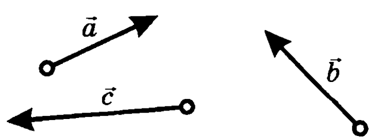
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$$

9

M, *N*, *E*, *F*, *K* — произвольные точки.
Доказать, что

$$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{NE}$$

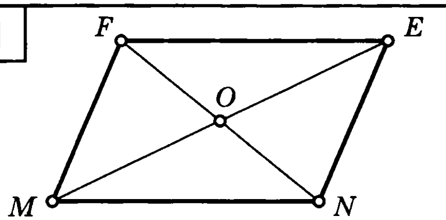
10



Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Продолжение табл. 24

11



$MFEN$ — параллелограмм
Доказать, что

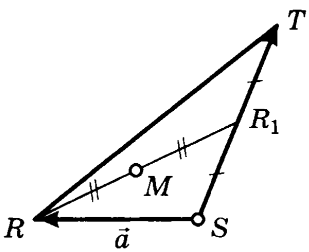
$$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{FM}$$

12

Найдите $\overrightarrow{X}$, если

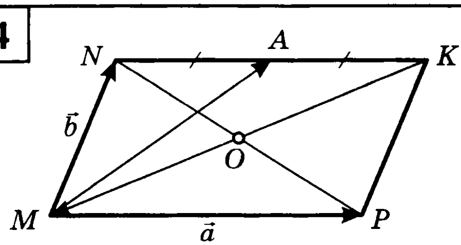
$$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{X}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}$$

13



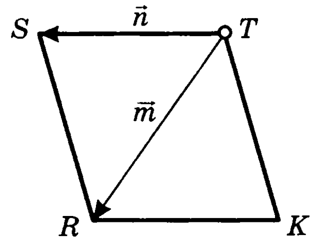
Выразите вектор $\overrightarrow{SM}$ через $\overrightarrow{SR}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{ST}=\vec{b}$

14



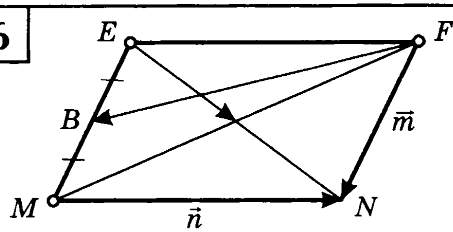
$MNKP$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MA}$ через векторы $\overrightarrow{MP}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$

15



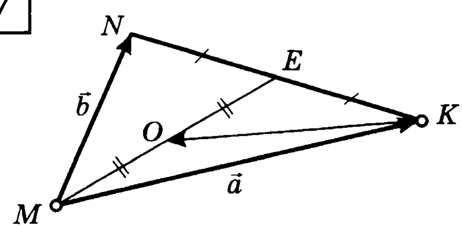
$RSTK$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{RK}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{SR}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

16



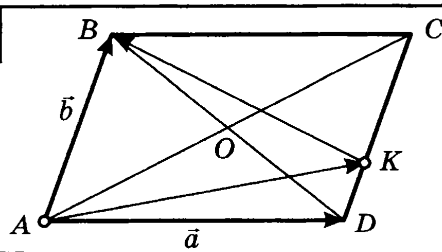
$MNFE$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{FB}$ через векторы $\overrightarrow{FN}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{n}$

17



Выразите вектор $\overrightarrow{KO}$ через векторы $\overrightarrow{MK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MN}=\vec{b}$

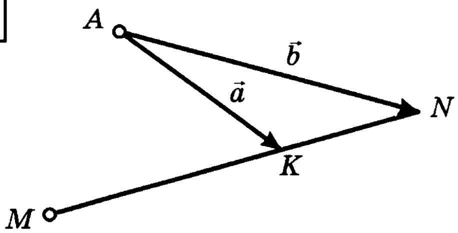
18



$ABCD$ — параллелограмм
$DK : KC = 1 : 3$
Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ через векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

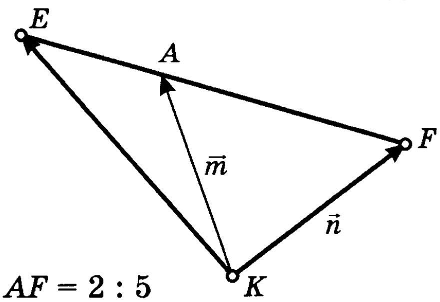
Продолжение табл. 24

19



$MK : KN = 3 : 2$
Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$

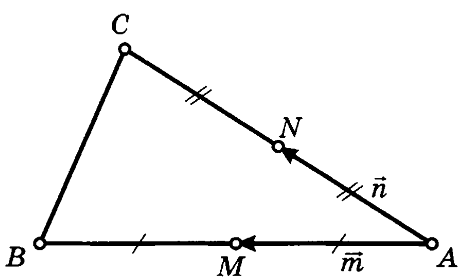
20



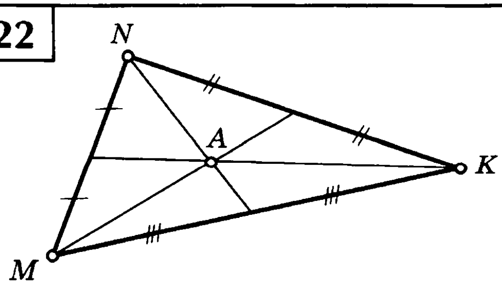
$EA : AF = 2 : 5$
Выразите вектор $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{KA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{KF}$

21

$\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$
$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ — ?

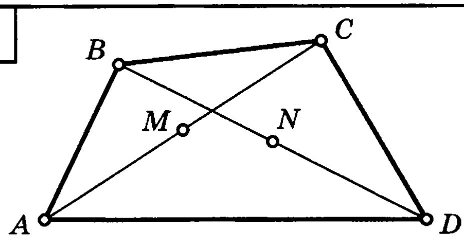


22



Доказать, что
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$

23

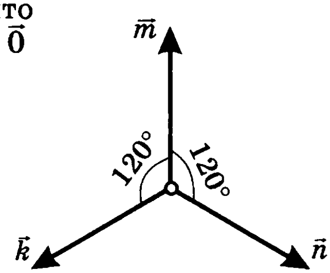


M — середина BD
N — середина AC

Доказать, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$

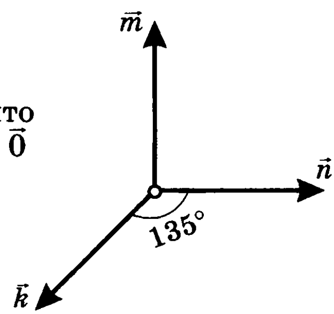
24

$|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{k}|$
Доказать, что
$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$

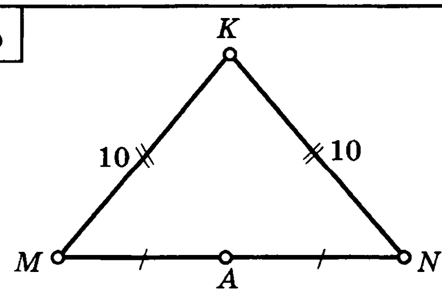


25

$|\vec{n}| = |\vec{k}| = 1$
$|\vec{m}| = \sqrt{2}$
Доказать, что
$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$



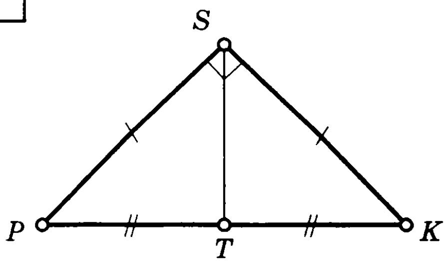
26



$KA = 8$
Найдите $|\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{KM}|$

Продолжение табл. 24

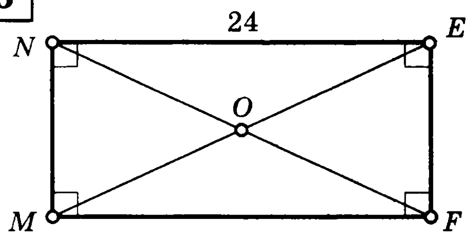
27



$KP = 12$

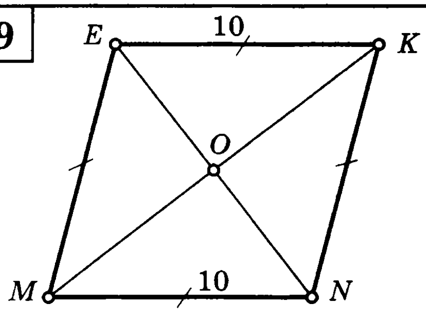
Найдите $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{PT}|$

28



Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{OF}|$

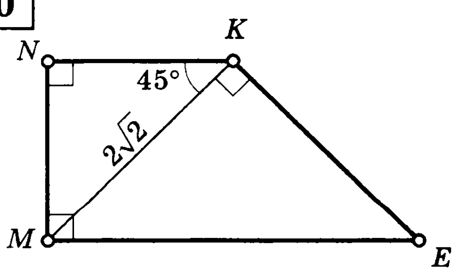
29



$EN = 12$

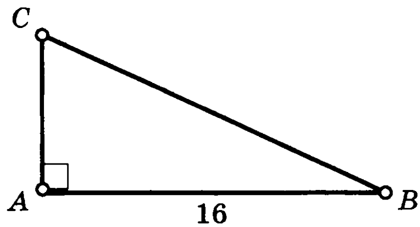
Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{OE}|$

30



Найдите $|\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}|$

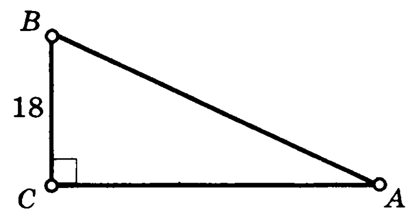
31



$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$|\vec{p}|$ — ?

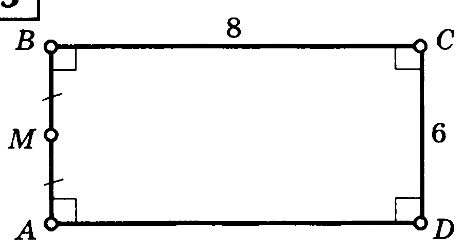
32



$\vec{k} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$

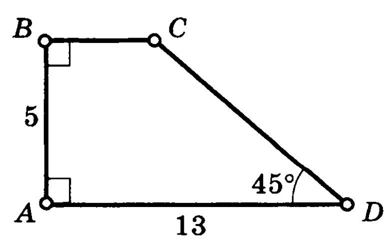
$|\vec{k}|$ — ?

33



Найдите: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{MC}|$

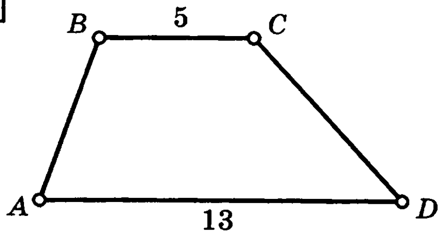
34



Найдите: $|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AC}|$

Окончание табл. 24

35

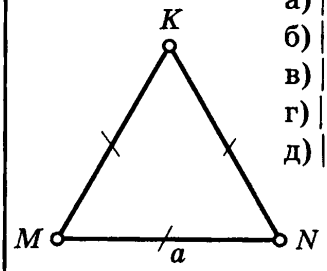


$ABCD$ — трапеция

$\vec{a} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

Найдите: $|\vec{a}|$

36



Найдите:

а) $|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN}|$,

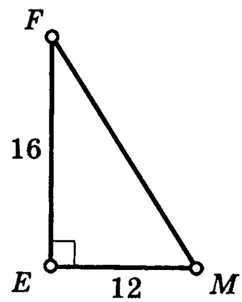
б) $|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}|$,

в) $|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NK}|$,

г) $|\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KN}|$,

д) $|\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MN}|$

37



Найдите:

1) $|\overrightarrow{EM}| - |\overrightarrow{EF}|$,

2) $|\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{EF}|$,

3) $|\overrightarrow{EM}| + |\overrightarrow{EF}|$,

4) $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EF}|$,

5) $|\overrightarrow{ME}| + |\overrightarrow{EF}|$,

6) $|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}|$,

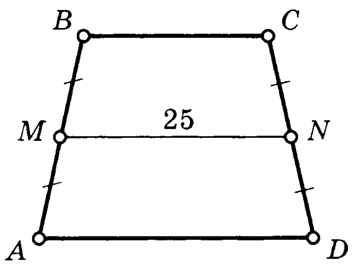
7) $|\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{EF}|$,

8) $|\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EF}|$

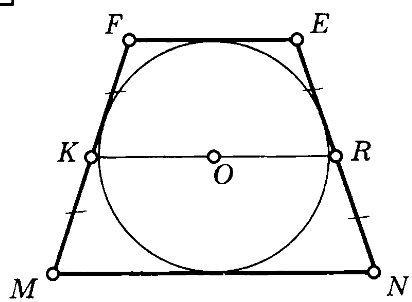
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Таблица 25

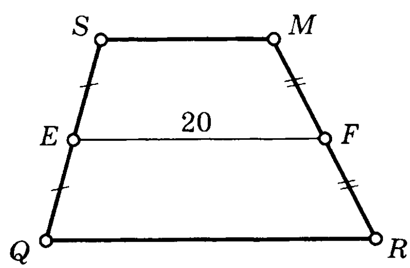
1 $AB = CD = 15$, P_{ABCD} — ?



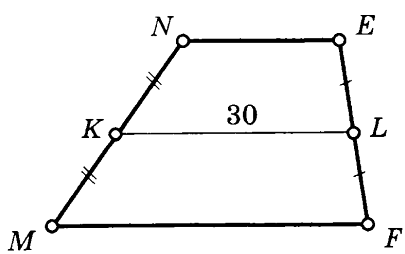
2 $P_{MNEF} = 30$, KR — ?



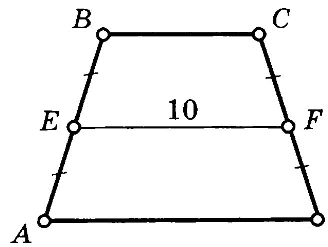
3 $QR - SM = 8$, SM, QR — ?



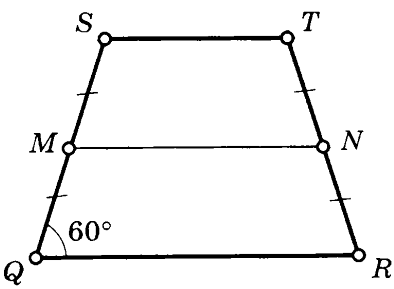
4 $MF = 2\,NE$, NE, MF — ?



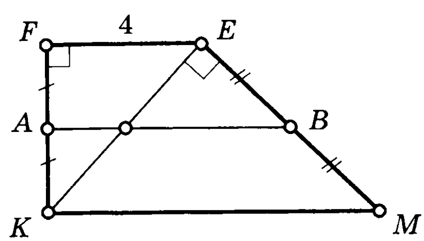
5 $P_{ABCD} = 36$, AB — ?



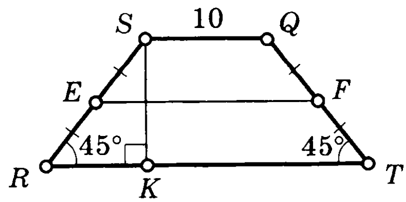
6 $SQ = TR = 20$, ST, MN — ?



7 $\angle FEM = 150°$, AB — ?



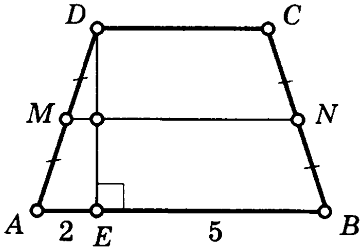
8 $SK = 8$, RT, EF — ?



Продолжение табл. 25

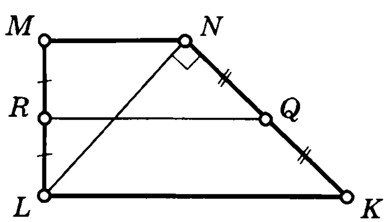
9

MN, DC — ?



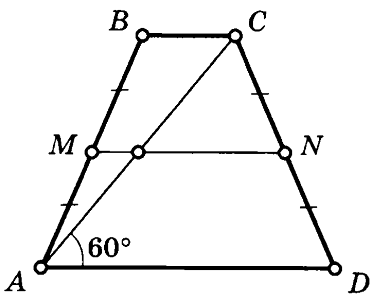
10

$ML = 4$, $\angle MNK = 135°$
RQ — ?



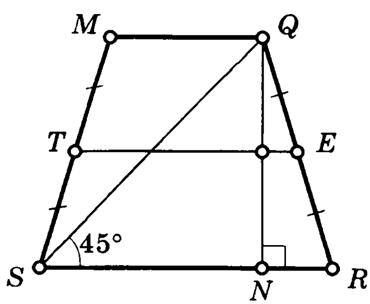
11

$AC = 16$, MN — ?



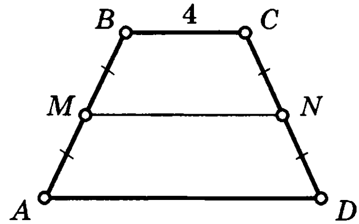
12

$QN = 4$, TE — ?



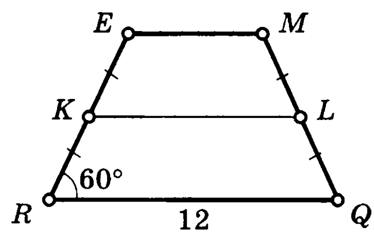
13

$AD - BC = 4$, MN — ?



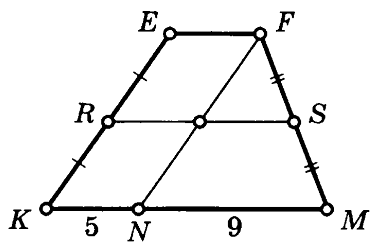
14

$RE = EM = MQ$, KL — ?



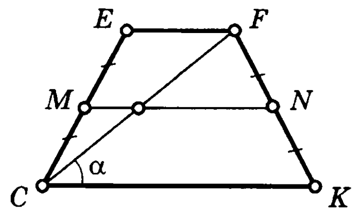
15

$KE \parallel NF$, RS — ?



16

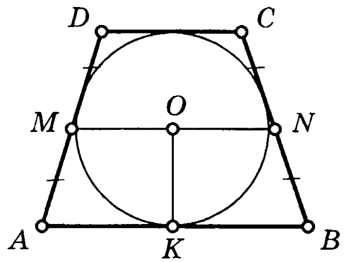
$MN = 4$, $S_{CEFK} = 8$
$\operatorname{tg} \alpha$ — ?



Продолжение табл. 25

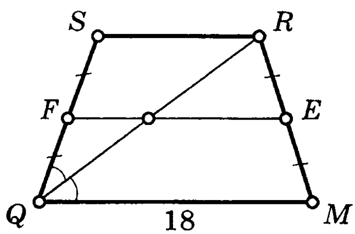
17

$MN = 68$, $AB - DC = 64$
OK — ?



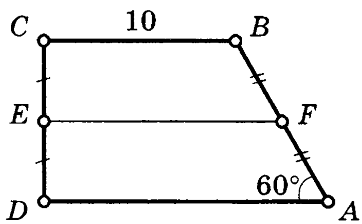
18

$P_{QSRM} = 48$, EF — ?



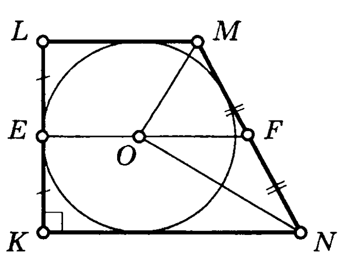
19

$AB = 8$, EF — ?



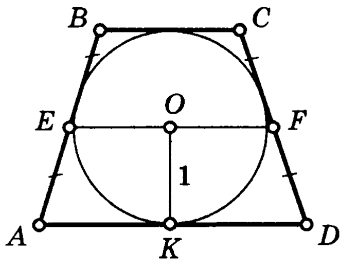
20

$OM = 6$, $ON = 8$, EF — ?



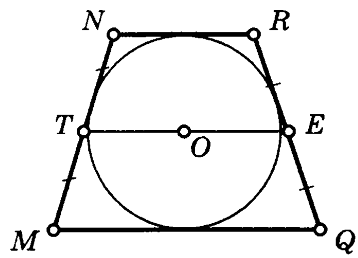
21

$AD = 2\,BC$, EF — ?



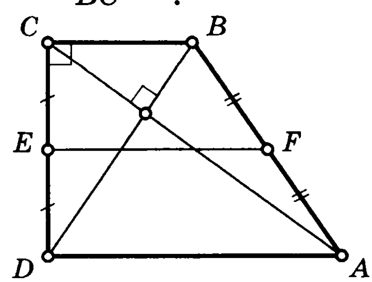
22

$S_{MNRQ} = 20$, $\sin\angle M = 0{,}8$
TE — ?



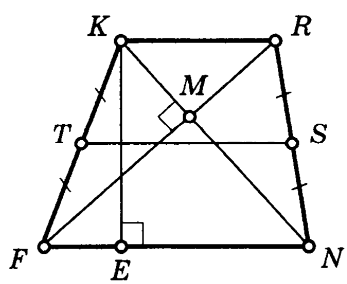
23

$BC : CD = 1 : 2$, $EF = 20$
BC — ?

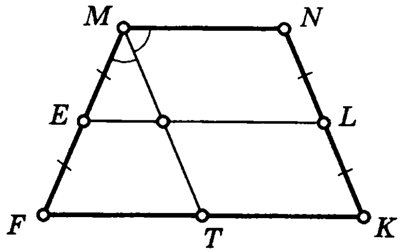
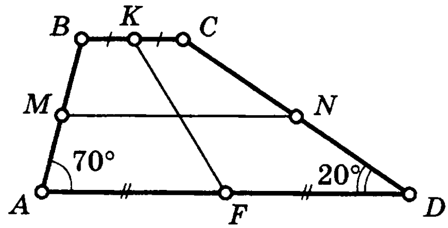


24

$KF = RN$, $KE = 10$
TS — ?



Окончание табл. 25

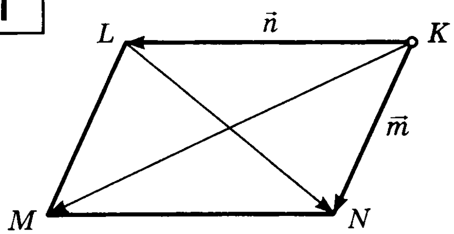
25 $P_{FMNK} = 71{,}8$, $EL = 21{,}4$ $MT \parallel NK$, MN — ? 	**26** $KF = 2$, $MN = 4$ MN — средняя линия BC, AD — ? 

IX класс

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

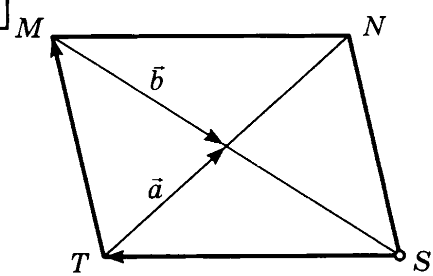
Таблица 1

1



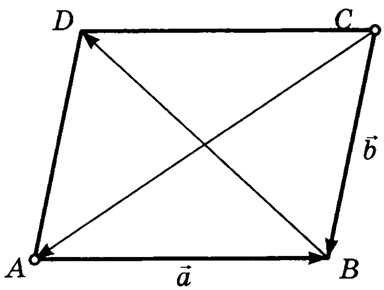
$MNKL$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

4



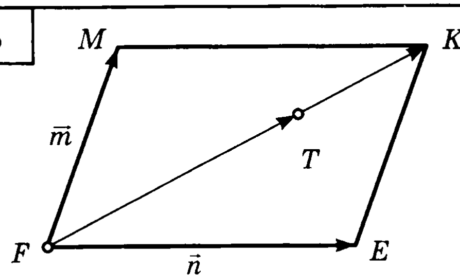
$TMNS$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{ST}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2



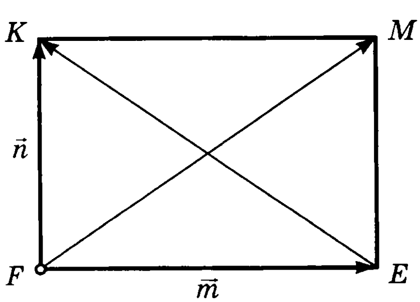
$ABCD$ — параллелограмм
Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

5



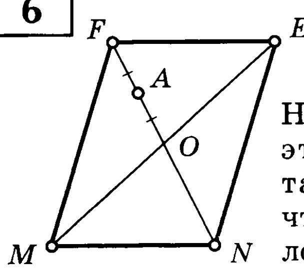
$MKEF$ — параллелограмм
$FT : TK = 3 : 1$
Разложите вектор $\overrightarrow{FT}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$

3



$FKME$ — прямоугольник
Выразите векторы $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

6



$FENM$ — параллелограмм
Найдите (если это возможно) такое число k, чтобы выполнялось равенство:

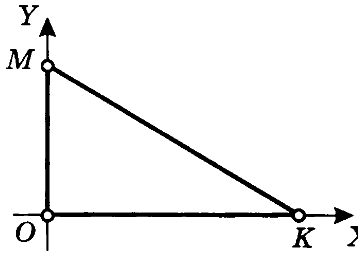
а) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{FO}$;
б) $\overrightarrow{MO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$;
в) $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NF}$;
г) $\overrightarrow{FM} = k \cdot \overrightarrow{NE}$;
д) $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{EF}$;
е) $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{NF}$;
ж) $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{FA}$;
з) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{NA}$;
и) $\overrightarrow{NE} = k \cdot \overrightarrow{EF}$;
к) $\overrightarrow{FO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

Таблица 2

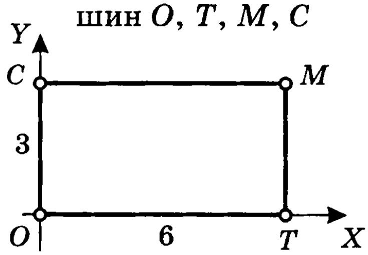
1

Дано: $OK = 3$, $OM = 2$
Найдите координаты вершин ΔMOK



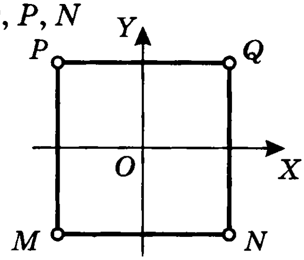
2

Дано: $TOCM$ — прямоугольник
Найдите координаты вершин O, T, M, C



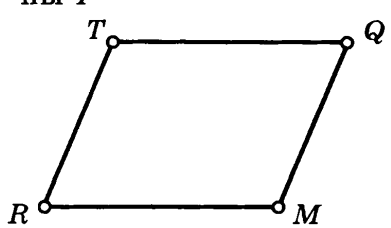
3

Дано: $MQPN$ — квадрат
$M\ (-2; -2)$
Найдите координаты вершин Q, P, N



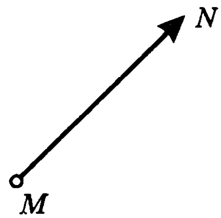
4

Дано: $TQMR$ — параллелограмм
$R\ (0; 0)$, $M\ (10; 0)$, $Q\ (24; 6)$
Найдите координату вершины T



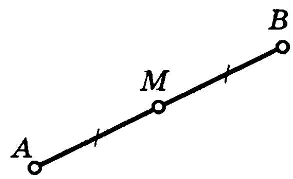
5

Дано: $M\ (3; 5)$, $N\ (-2; 4)$
Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$



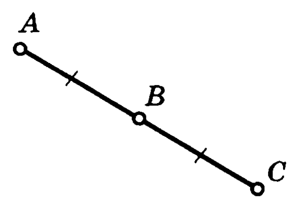
6

Дано: $A\ (2; 6)$, $B\ (6; 2)$
Найдите координаты точки M



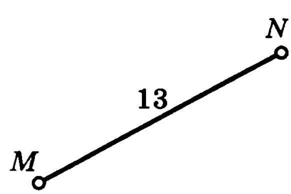
7

Дано: $A\ (2; 4)$, $B\ (0; 18)$
Найдите координаты точки C



8

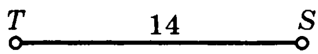
Дано: $M\ (4; 6)$, $N\ (x; 1)$
Найдите: x



Продолжение табл. 2

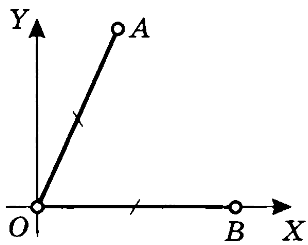
9

Дано: $S\,(2x; -2)$, $T\,(6; 4x)$
Найдите: x



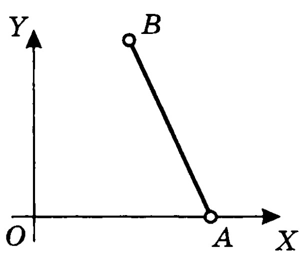
10

Дано: $A\,(1; 2)$, $B\,(x; 0)$
Найдите: x



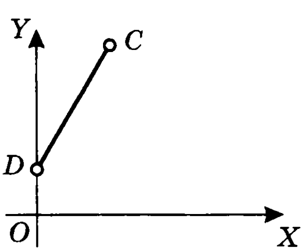
11

Дано: $A\,(3; 0)$, $B\,(2; 5)$
Найдите: AB



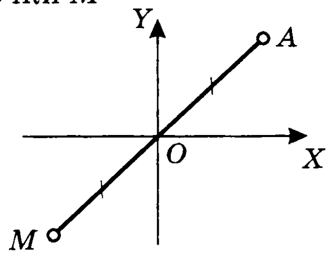
12

Дано: $C\,(1; 4)$, $D\,(0; 3)$
Найдите: CD



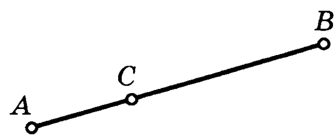
13

Дано: $A\,(3; 3)$
Найдите координаты точки M



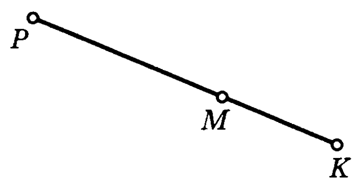
14

Дано: $A\,(1; 2)$, $B\,(7; 10)$
$AC : CB = 1 : 3$
Найдите координаты точки C



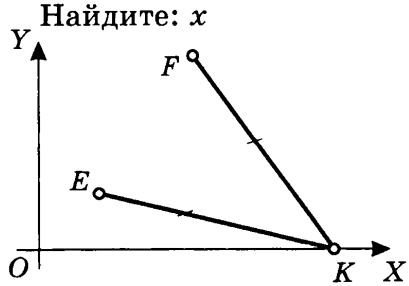
15

Дано: $P\,(6; 3)$, $M\,(14; 9)$
$PM : MK = 2 : 1$
Найдите координаты точки K



16

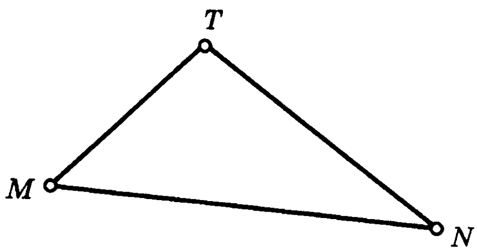
Дано: $E\,(2; 2)$, $F\,(6; 10)$, $K\,(x; 0)$
Найдите: x



Окончание табл. 2

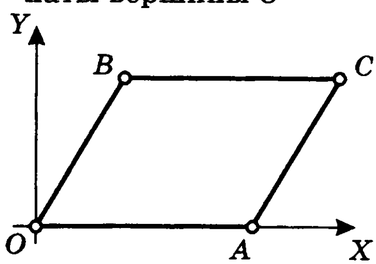
17

Дано: ΔMTN
$M\ (8;\ 0)$, $N\ (6;\ -1)$, $T\ (3;\ -4)$
Найдите: $P_{\Delta MTN}$



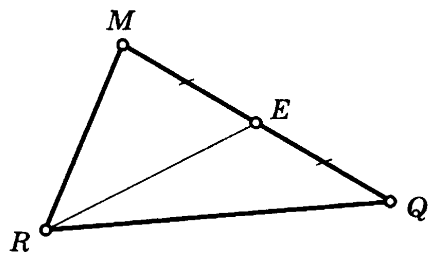
18

Дано: $OBCA$ — параллелограмм
$B\ (3;\ 2)$, $OA = 6$
Найдите: AC, OC и координаты вершины C



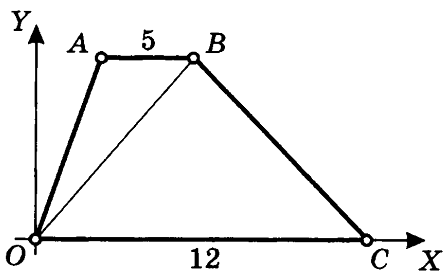
19

Дано: ΔMQR
$M\ (6;\ 3)$, $Q\ (0;\ 2)$, $R\ (1;\ -5)$
Найдите: RE



20

Дано: $OABC$ — трапеция
$AB = 5$, $OC = 12$, $A\ (2;\ 4)$
Найдите: BC, OB

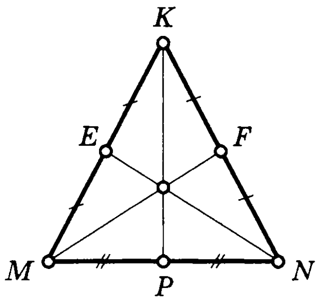


ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Таблица 3

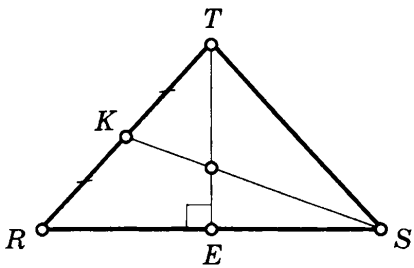
1

Дано: ΔMKN
$KP = 80$, $MN = 40$
Найдите: MF и NE



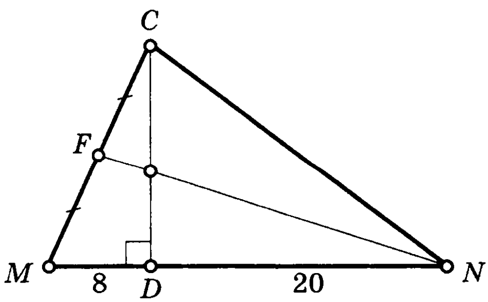
2

Дано: ΔTRS
$RT = TS$
$TE = 8$, $RS = 24$
Найдите: SK



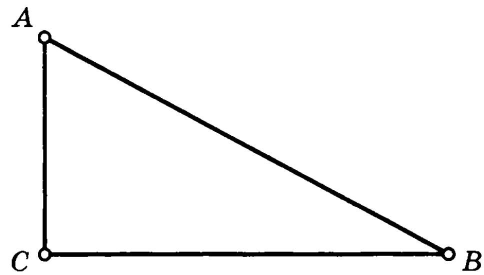
3

Дано: ΔMCN
$CD = 20$
Найдите: NF



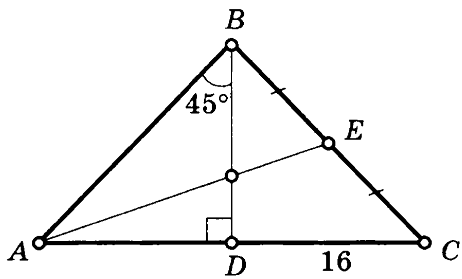
4

Дано: ΔABC
$B\ (0;\ 0)$, $C\ (6;\ 2\sqrt{3})$, $A\ (4;\ 4\sqrt{3})$
Найдите: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$



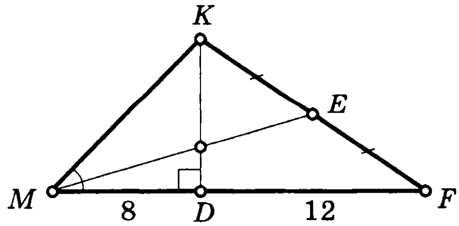
5

Дано: ΔABC
$BD = 12$
Найдите: AE



6

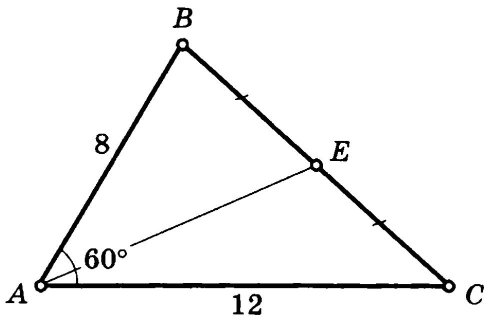
Дано: ΔMKF
$\angle KMF = 45°$
Найдите: ME



Окончание табл. 3

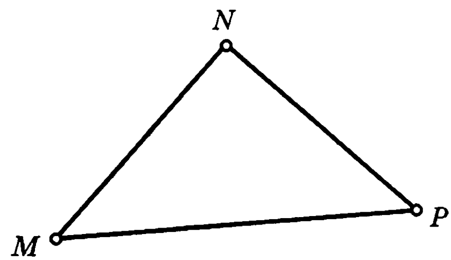
7

Дано: ΔABC
Найдите: AE



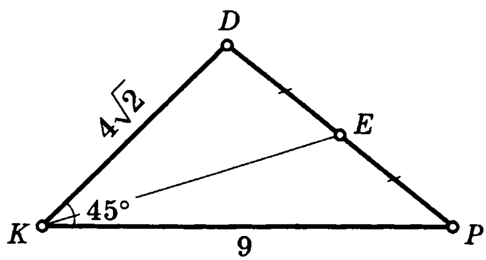
8

Дано: ΔMNP
M (4; 8), N (8; 2), P (14; 6)
Найдите: $\angle M$, $\angle N$, $\angle P$



9

Дано: ΔKDP
Найдите: KE

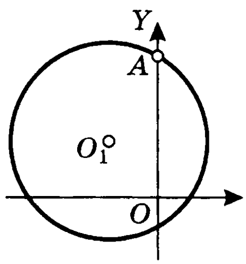


УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Таблица 4

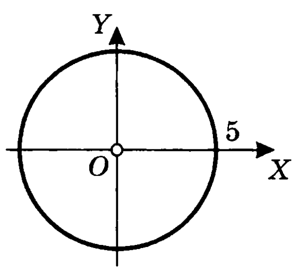
1

Дано: O_1 (−4; 2), A (0; 5)
Составьте уравнение окружности



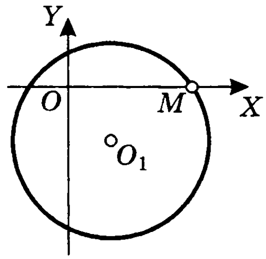
2

Какие из точек A (0; 4), B (5; 0), C (3; −4), D (4; −3) принадлежат окружности?



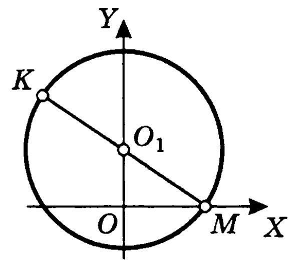
3

Дано: O_1 (2; −4), M (5; 0)
Составьте уравнение окружности



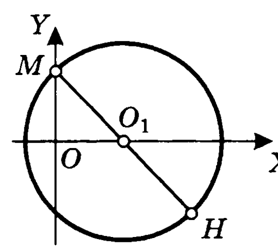
4

Дано: K (−2; 6), M (2; 0)
Составьте уравнение окружности



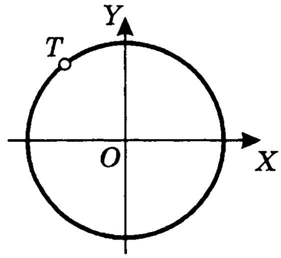
5

Дано: M (0; 2), H (6; −2)
Составьте уравнение окружности



6

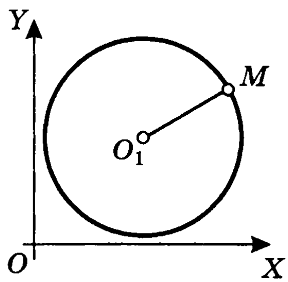
Дано: T (−2; 3)
Составьте уравнение окружности



Продолжение табл. 4

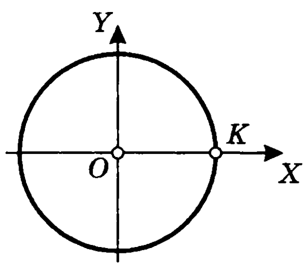
7

Дано: O_1 (4; 5), $O_1M = 3$
Составьте уравнение окружности



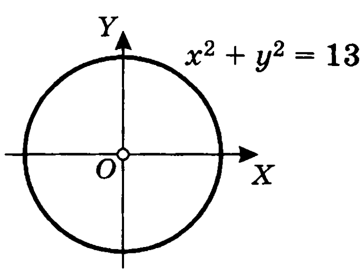
8

Дано: $OK = 5$, A (4; −3), B (3; 4)
Докажите, что AB — хорда окружности



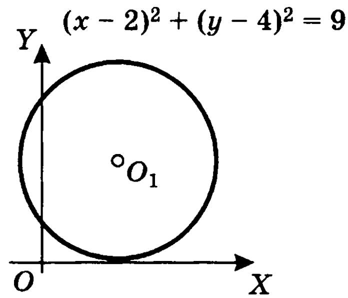
9

Найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 3$



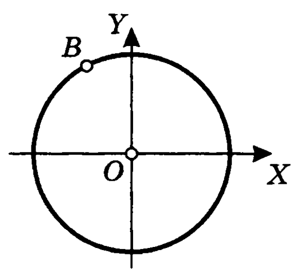
10

На окружности найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 4$



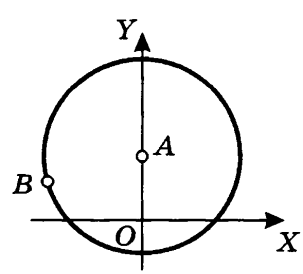
11

Дано: B (−2; 6)
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B

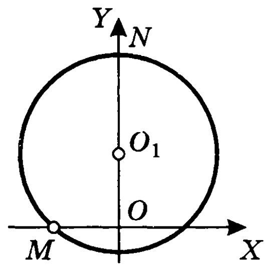
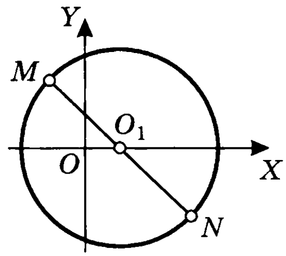


12

Дано: A (0; 2), B (−3; 1)
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B

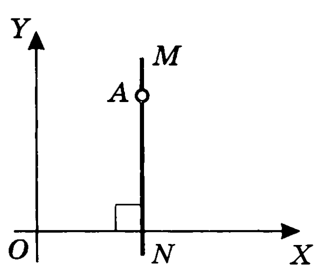
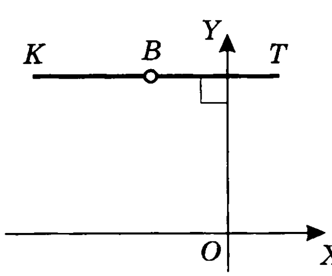


Окончание табл. 4

13 Дано: $M(-3;\ 0)$, $N(0;\ 9)$, $O_1(0;\ y_0)$ Составьте уравнение окружности, проходящей через точки M и N  	**14** Дано: $M(-2;\ 3)$, $N(4;\ -3)$, MN — диаметр Составьте уравнение окружности, проходящей через точки M и N 

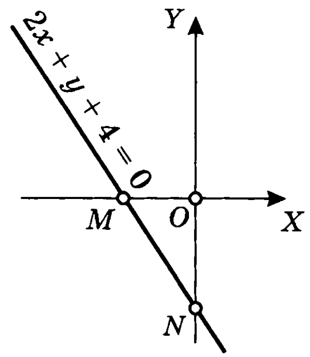
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Таблица 5

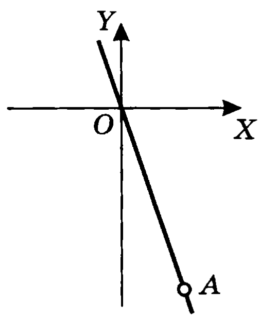
1 Дано: $A(3;\ 9)$ Составьте уравнение прямой MN  	**2** Дано: $B(-3;\ 10)$ Составьте уравнение прямой KT 

Продолжение табл. 5

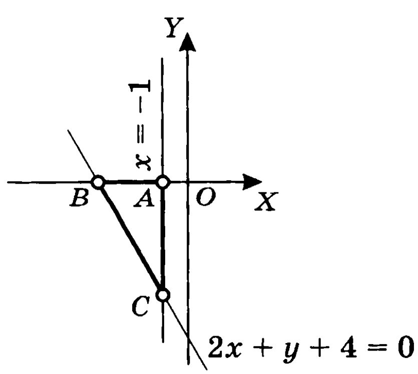
3 Найдите: $S_{\Delta MON}$



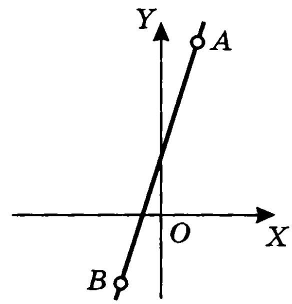
4 Дано: $A\ (2;\ -10)$
Составьте уравнение прямой, проходящей через точки O и A



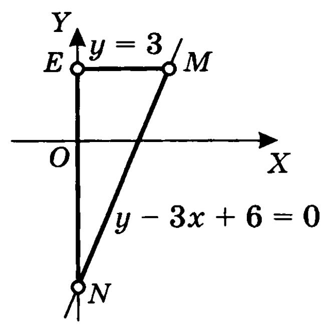
5 Найдите: $S_{\Delta BAC}$



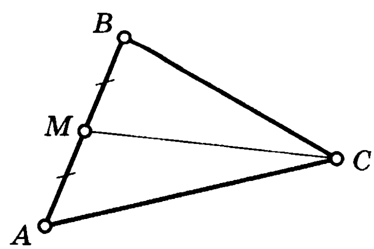
6 Дано: $A\ (1;\ 10)$, $B\ (-1;\ -4)$
Составьте уравнение прямой AB



7 Найдите: $S_{\Delta MEN}$



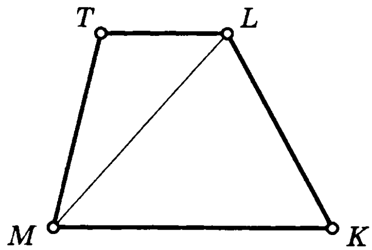
8 Дано: ΔABC
$A\ (8;\ 12)$, $B\ (-8;\ 0)$, $C\ (-2;\ -8)$
Составьте уравнение медианы CM



Окончание табл. 5

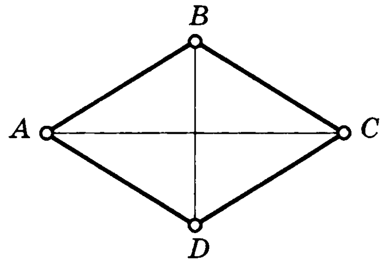
9

Дано: $MTLK$ — трапеция
$M(-4; -4)$, $T(-6; 2)$,
$L(14; 14)$, $K(6; 2)$
Составьте уравнение диагонали ML



10

Дано: $ABCD$ — ромб
$AC = 20$, $BD = 8$
Составьте уравнение прямых, содержащих стороны ромба

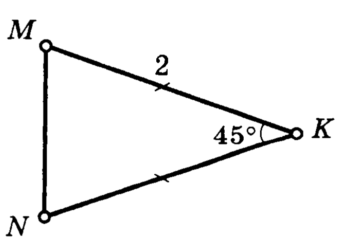


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 6

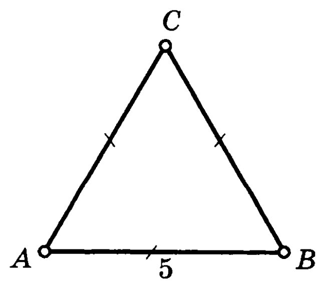
1

Найдите: $S_{\Delta MNK}$



2

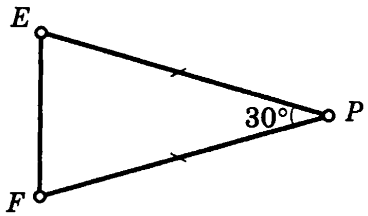
Найдите: $S_{\Delta ABC}$



Продолжение табл. 6

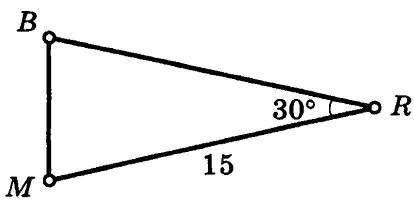
3

Дано: $S_{\Delta EPF} = 20$
Найдите: EP



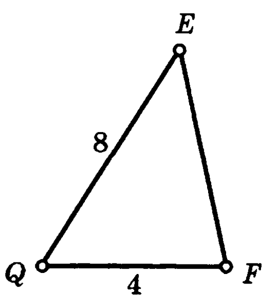
4

Дано: $S_{\Delta MBR} = 90$
Найдите: BR



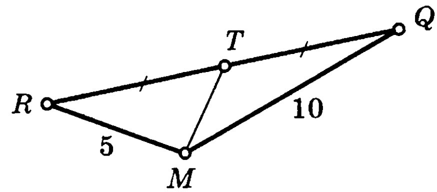
5

Дано: $S_{\Delta EFQ} = 8\sqrt{3}$
Найдите: $\angle EQF$



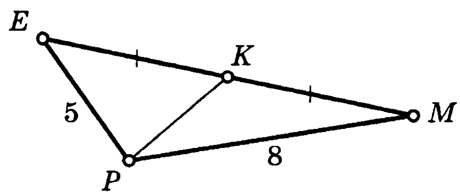
6

Дано: $\angle RMQ = 135°$
Найдите: $S_{\Delta TMQ}$



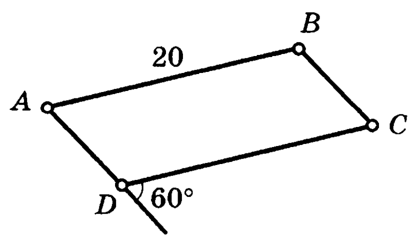
7

Дано: $\angle EPM = 120°$
Найдите: $S_{\Delta EKP}$



8

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$
Найдите: P_{ABCD}



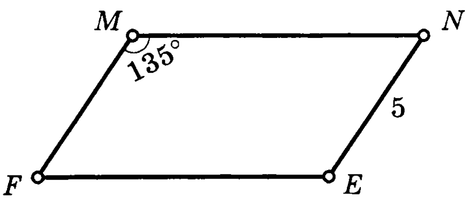
Продолжение табл. 6

9

Дано: $MNEF$ — параллелограмм

$S_{MNEF} = 25\sqrt{2}$

Найдите: P_{MNEF}

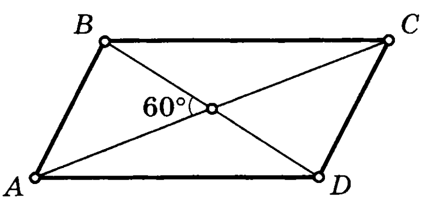


10

Дано: $ABCD$ — параллелограмм

$BD = 16$, $AC = 20$

Найдите: S_{ABCD}

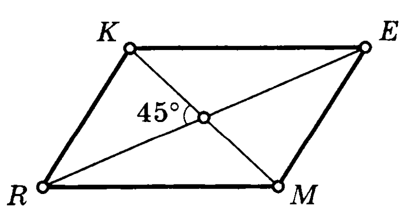


11

Дано: $KEMR$ — параллелограмм

$KM = 12$, $RE = 20$

Найдите: S_{KEMR}

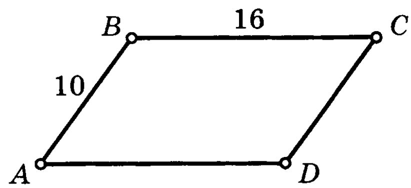


12

Дано: $ABCD$ — параллелограмм

$\cos \angle B = -0{,}6$

Найдите: S_{ABCD}

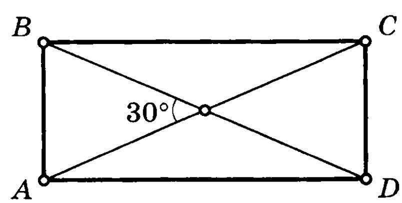


13

Дано: $ABCD$ — прямоугольник

$AC = 26$

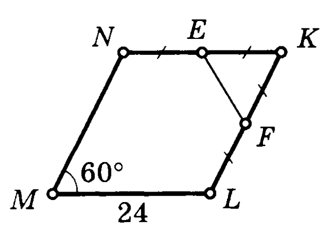
Найдите: S_{ABCD}



14

Дано: $MNKL$ — параллелограмм

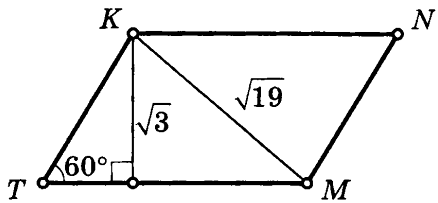
Найдите: $S_{\Delta EKF}$ — ?



Окончание табл. 6

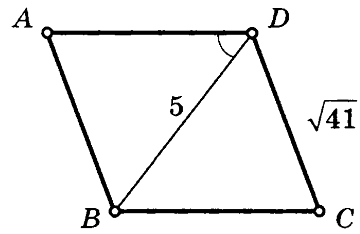
15

Дано: $TKNM$ — параллелограмм
Найдите: S_{TKNM}



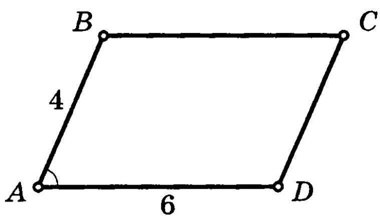
17

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$\sin \angle ADB = 4/5$
Найдите: S_{ABCD}



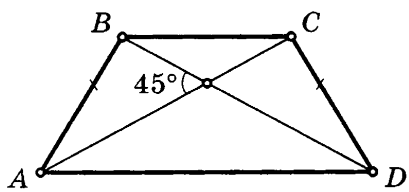
16

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
$\cos \angle A = 1/3$
Найдите: S_{ABCD}



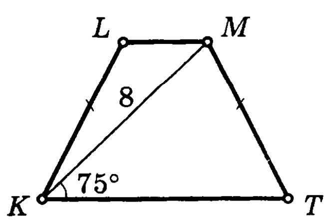
18

Дано: $ABCD$ — трапеция
$AC = 8$
Найдите: S_{ABCD}



19

Дано: $KLMT$ — трапеция
Найдите: S_{KLMT}

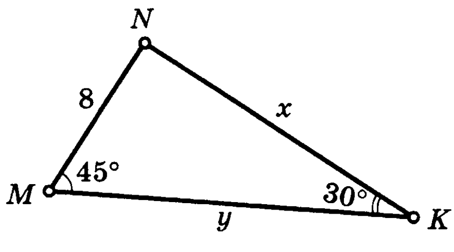


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

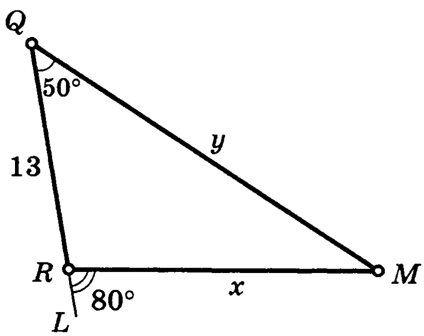
Таблица 7

Найдите x, y.

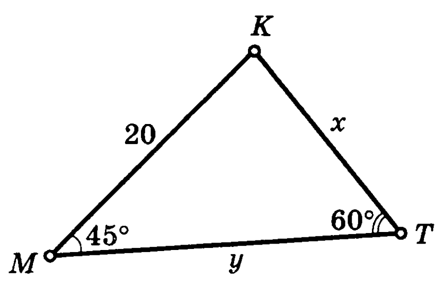
1



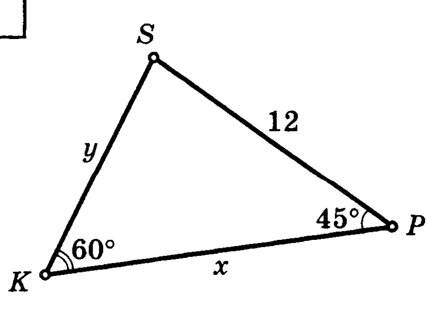
2



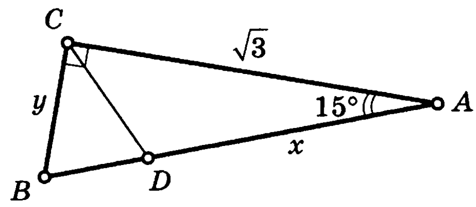
3



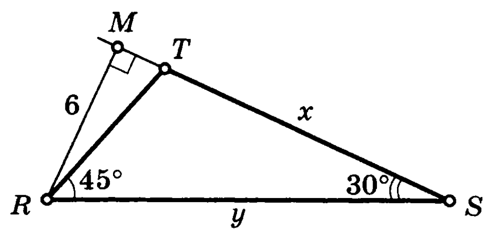
4



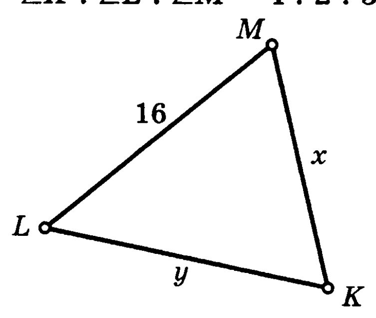
5 CD — биссектриса



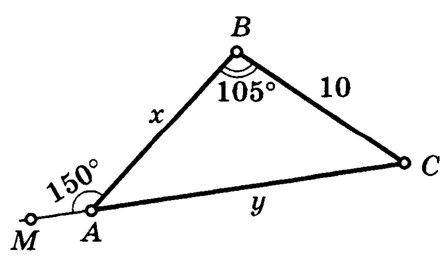
6



7 $\angle K : \angle L : \angle M = 4 : 2 : 3$



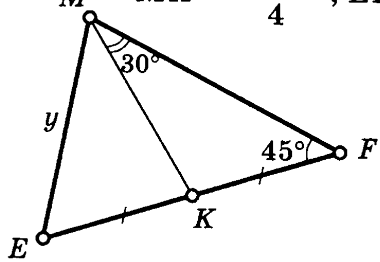
8



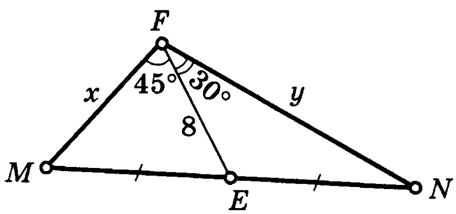
Продолжение табл. 7

9

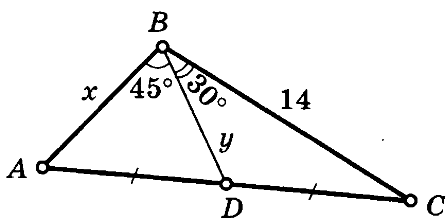
$MK = \frac{13\sqrt{2}}{4}$, $EF = x$



10

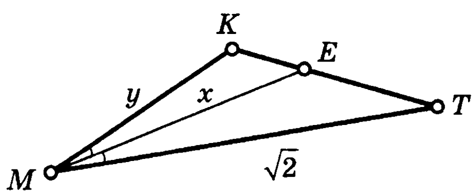


11



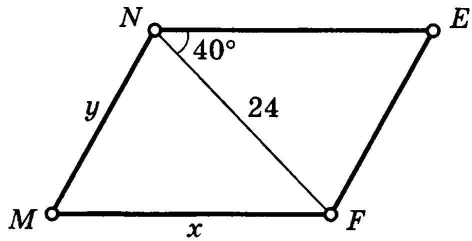
12

ME — биссектриса
$\angle M = 30°$
$MK = KT = y$



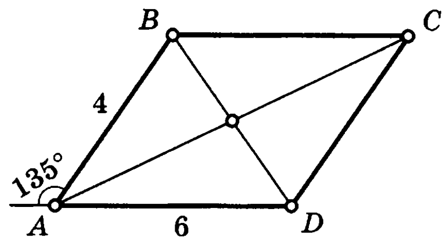
13

$MNEF$ — параллелограмм
$\angle MFE = 120°$



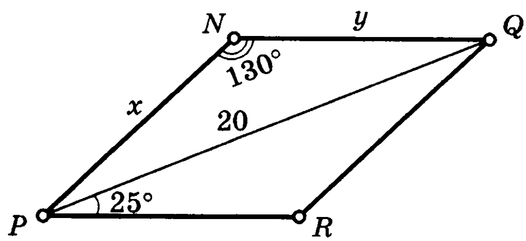
14

$ABCD$ — параллелограмм
$BD = x$, $AC = y$



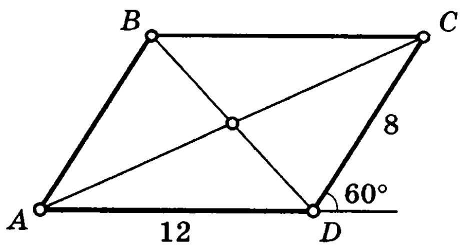
15

$PNQR$ — параллелограмм
$PQ = 20$



16

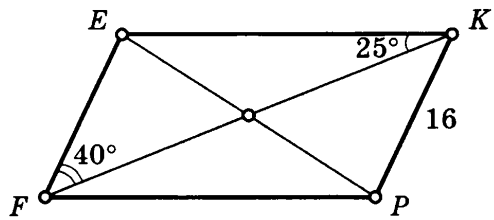
$ABCD$ — параллелограмм
$AC = x$, $BD = y$



Окончание табл. 7

17

$FEKP$ — параллелограмм
$EP = x$, $FK = y$

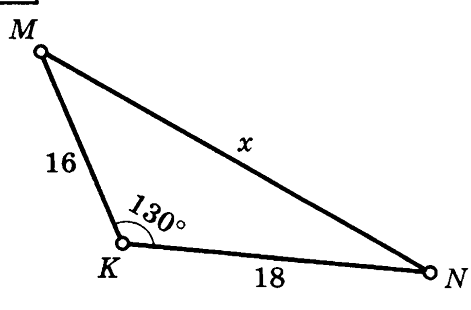


РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

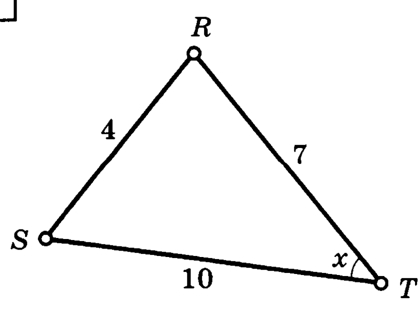
Таблица 8

Найдите x, y.

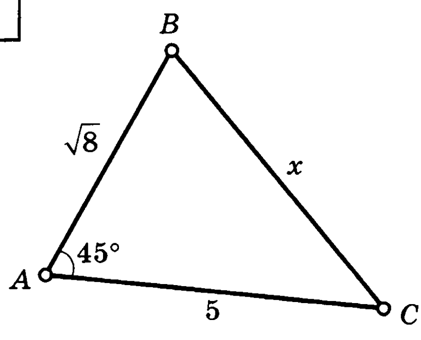
1



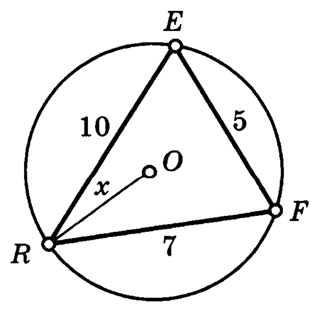
2



3



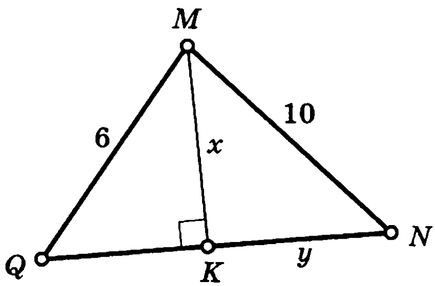
4



Продолжение табл. 8

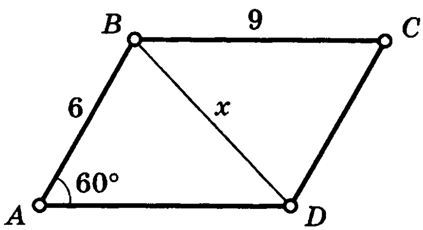
5

$QN = 12$



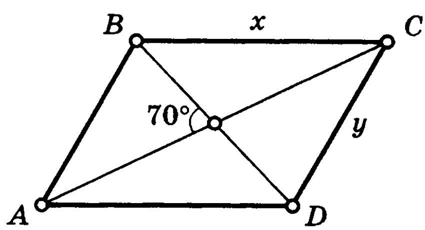
6

$ABCD$ — параллелограмм



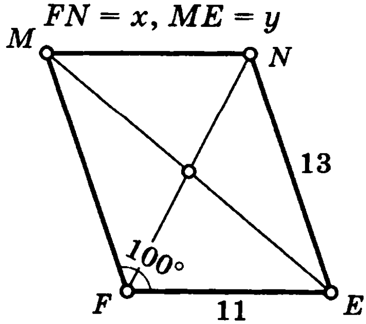
7

$ABCD$ — параллелограмм
$AC = 8$, $BD = 6$



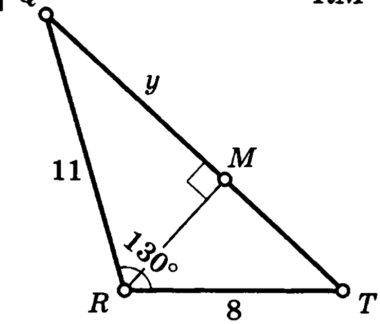
8

$MNEF$ — параллелограмм
$FN = x$, $ME = y$

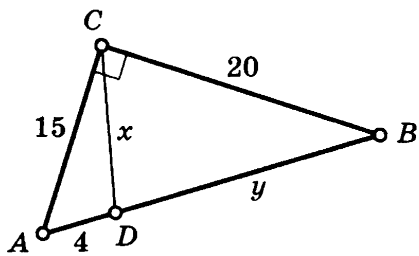


9

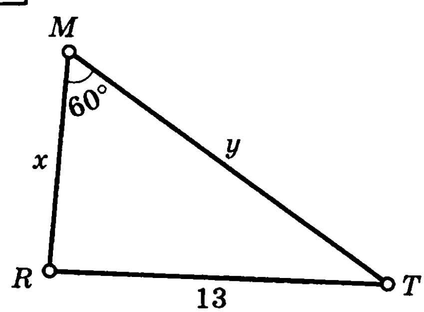
$RM = x$



10

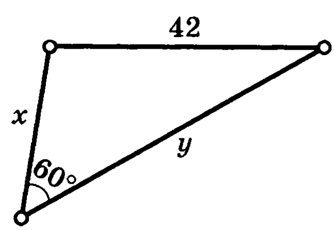


11



12

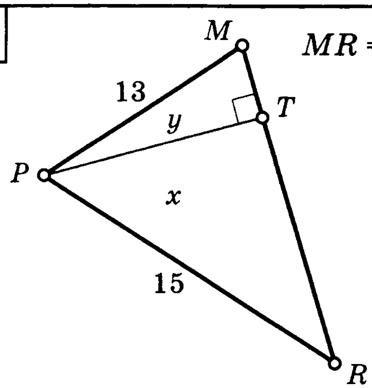
$x : y = 3 : 8$



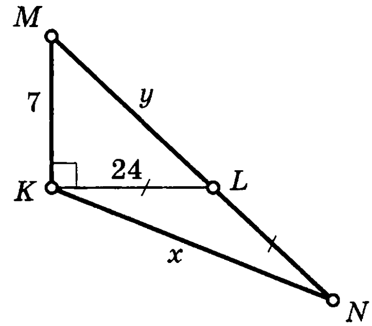
Продолжение табл. 8

13

$MR = 14$

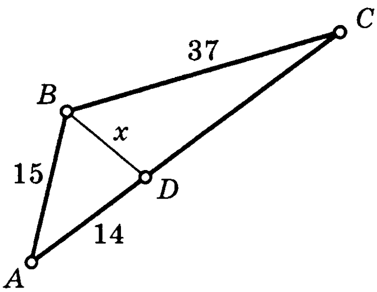


17



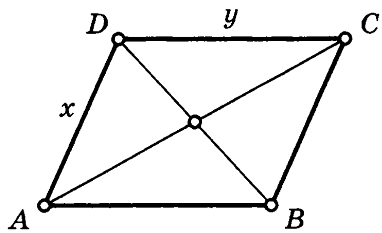
14

$AC = 44$



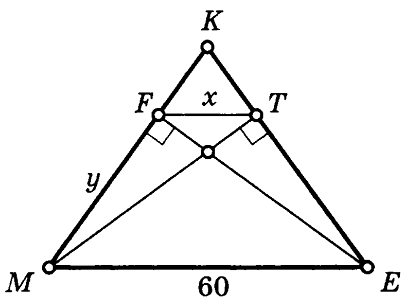
18

$ABCD$ — параллелограмм
$x : y = 2 : 3$
$BD = 17, AC = 19$



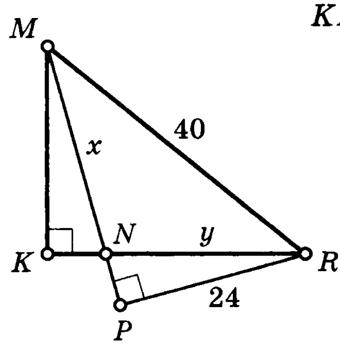
15

$ME \parallel FT$, $MK = EK = 50$



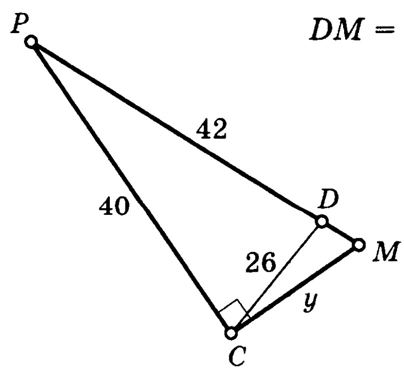
19

$KN = 7$



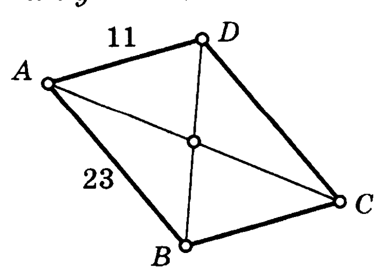
16

$DM = x$



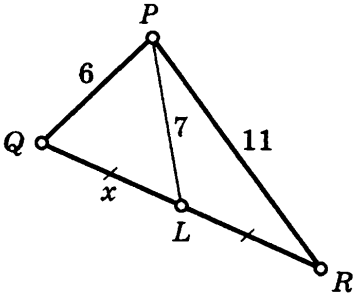
20

$ABCD$ — параллелограмм
$BD = x, AC = y$
$x : y = 2 : 3$



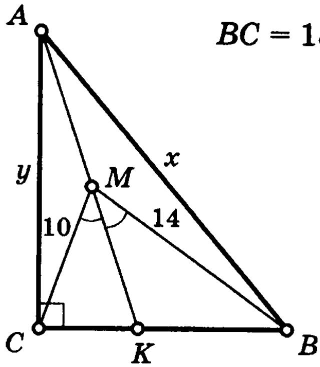
Окончание табл. 8

21



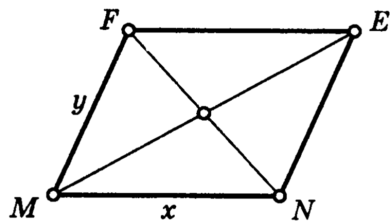
22

$BC = 18$



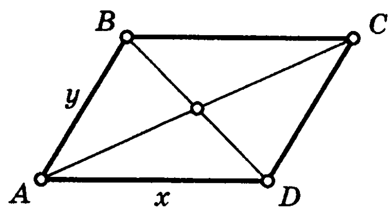
23

$MFEN$ — параллелограмм
$ME = 14$, $FN = 12$
$x - y = 4$



24

$ABCD$ — параллелограмм
$AD = BD = x$, $AB = y$
$x - y = 11$, $AC - BD = 2$



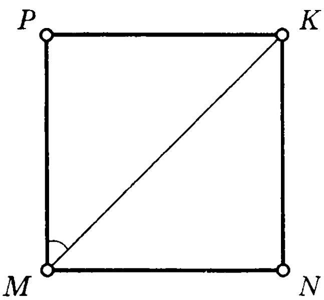
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Таблица 9

1

$MNKP$ — квадрат

Найдите: $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MK}}$

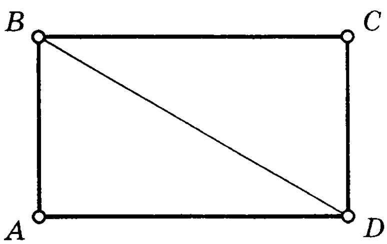


2

$ABCD$ — прямоугольник

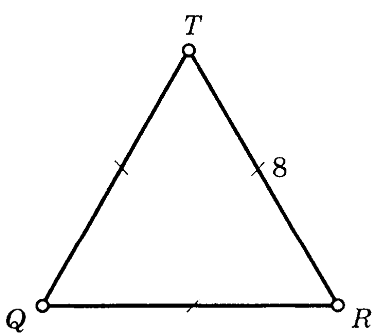
$|\overrightarrow{BA}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = 8$

Найдите: $|\overrightarrow{BD}|$



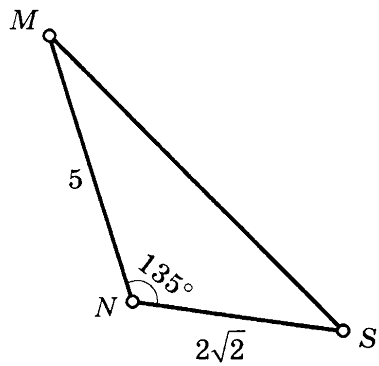
3

Найдите: $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RT}$



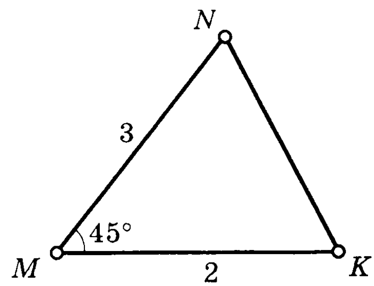
4

Найдите: $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NS}$



5

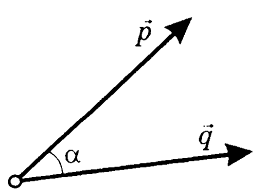
Найдите: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MK}$



6

$\vec{p}\,\{3; -4\}$, $\vec{q}\,\{15, 8\}$

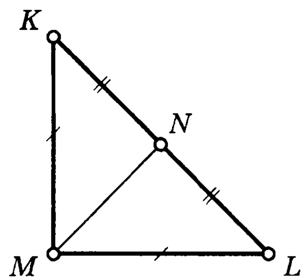
Найдите: $\cos \alpha$



Продолжение табл. 9

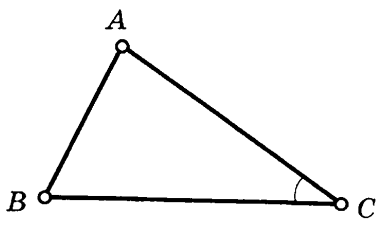
7

$\angle KML = 90°$, $KL = 2\sqrt{2}$
Найдите: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{KL}$



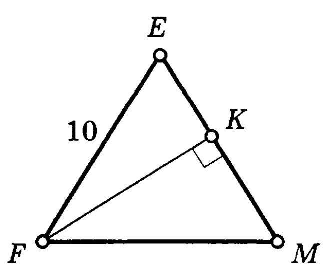
8

$A\,(-4;\ 8)$, $B\,(2;\ 14)$, $C\,(4;\ 0)$
Найдите: $\cos \angle C$



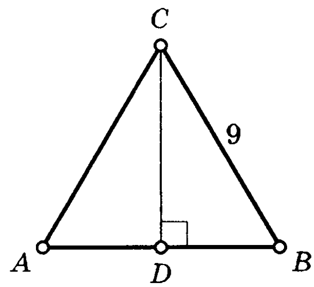
9

ΔFEM
$FE = EM = FM$
Найдите: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EM}$



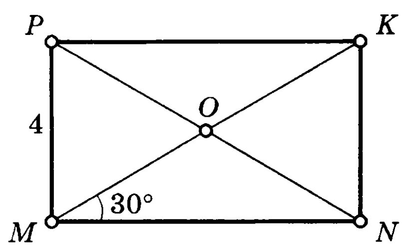
10

ΔABC
$AB = AC = BC$
Найдите: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$



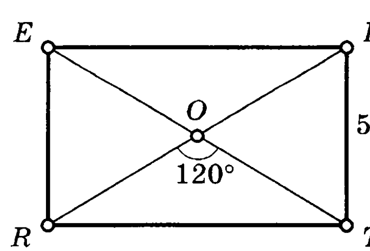
11

$MNKP$ — прямоугольник
Найдите: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$



12

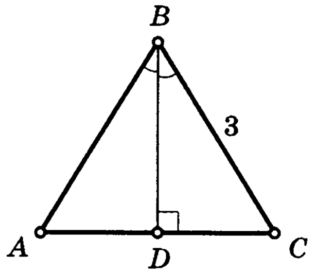
$REFT$ — прямоугольник
Найдите: $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FT}$



Продолжение табл. 9

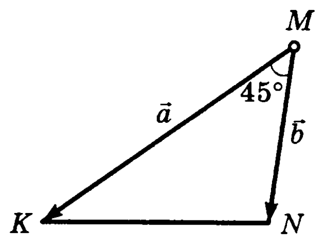
13

ΔABC — равносторонний
Найдите: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$



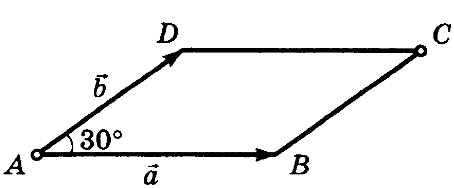
14

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$
Найдите: $S_{\Delta MKN}$



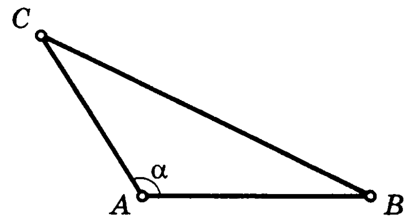
15

$ABCD$ — параллелограмм
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$
Найдите: S_{ABCD}



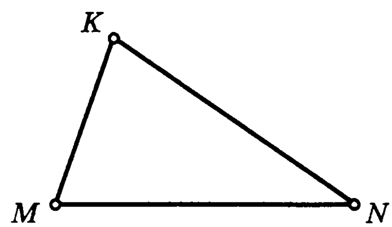
16

$A\ (2;\ 4)$, $B\ (2;\ 8)$, $C\ (6;\ 4)$
Найдите: $\angle CAB$



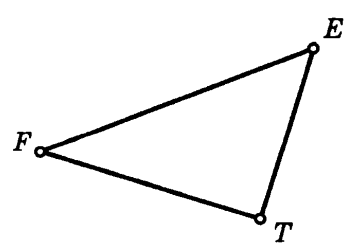
17

$M\ (-1;\ \sqrt{3})$, $N\ (1;\ -\sqrt{3})$
$K\ (0,5;\ \sqrt{3})$
Найдите: $\angle M$



18

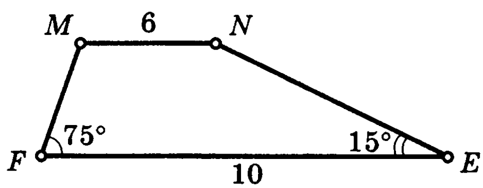
$E\ (-1;\ 5)$, $F\ (2;\ 8)$, $T\ (3;\ 1)$
Найдите: $\cos \angle E$



Окончание табл. 9

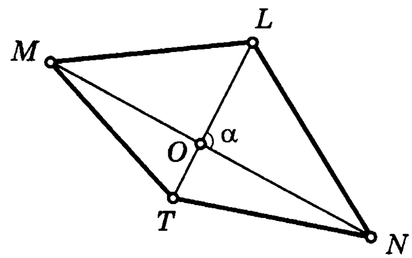
19

$FMNE$ — трапеция
Найдите: $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{NM}$



20

T (3; 3), L (4,5; 5,5)
M (1; 5), N (6; 2)
Найдите: $\angle LON$



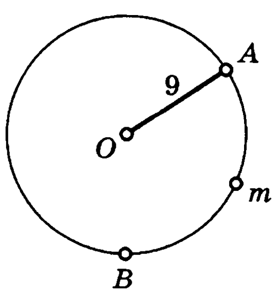
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ДЛИНА ДУГИ

Таблица 10

C — длина окружности, l — длина дуги.

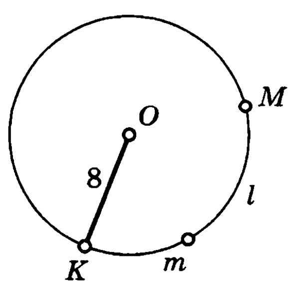
1

$\smile AmB = 120°$
Найдите: l



2

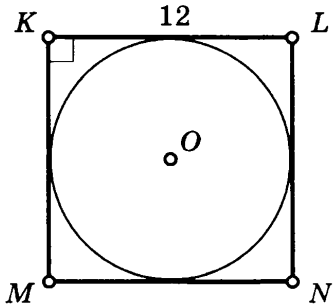
$l = 3\pi$
Найдите: $\smile KmM$



Продолжение табл. 10

3

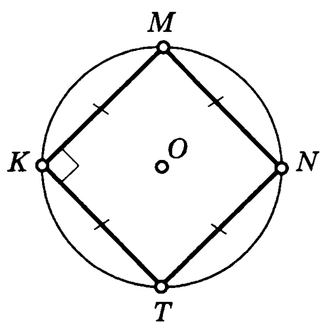
Найдите: C



4

$C = 4\pi$

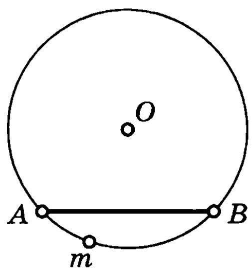
Найдите: S_{KMNT}



5

$\smile AmB = 120°$, $C = 8\pi\sqrt{3}$

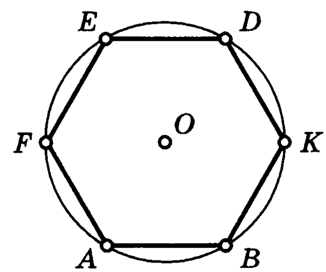
Найдите: AB



6

$S_{\triangle ABKDEF} = 72\sqrt{3}$

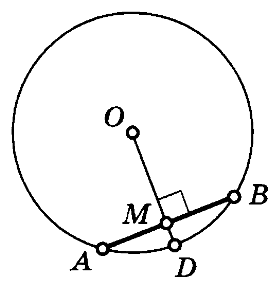
Найдите: C



7

$OM = 12$, $AB = 10$

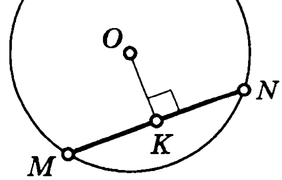
Найдите: C



8

$MN = 48$, $OK = 10$

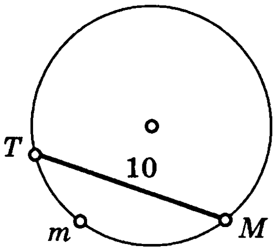
Найдите: C



Продолжение табл. 10

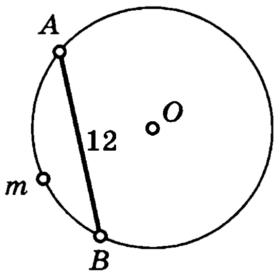
9

$\cup TmM = 120°$
Найдите: l



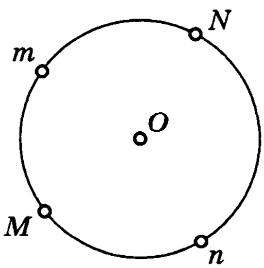
10

$C = 24\pi$
Найдите: $\cup AmB$



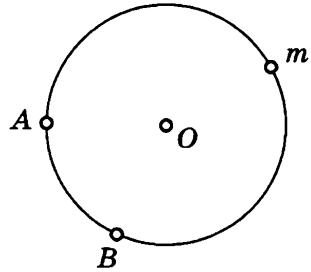
11

$\cup MmN : \cup NnM = 2 : 3$
Найдите: $\cup MmN$, $\cup NnM$



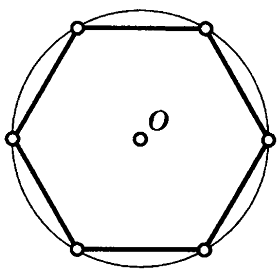
12

$\cup AmB - \cup BA = 90°$
Найдите: $\cup AmB$, $\cup BA$



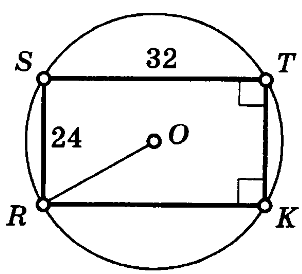
13

P — периметр
$C - P = 7$
Найдите: C



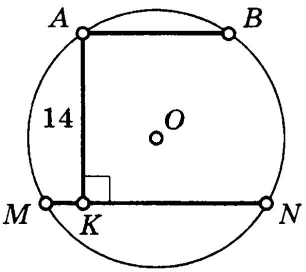
14

Найдите: C

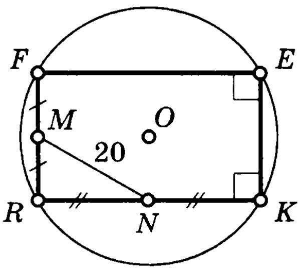


Продолжение табл. 10

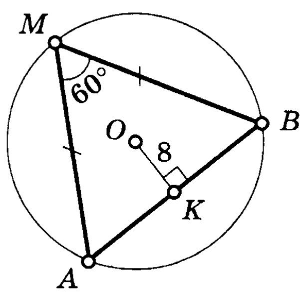
15 $AB \parallel MN$, $MN = 16$, $AB = 12$
Найдите: C



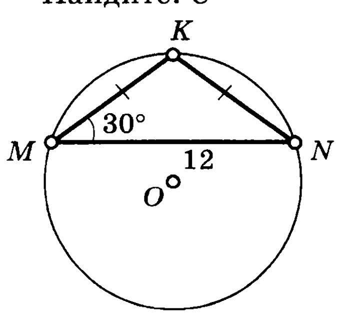
16 Найдите: C



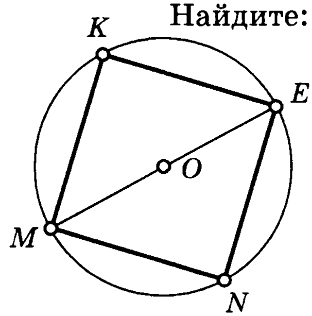
17 Найдите: C



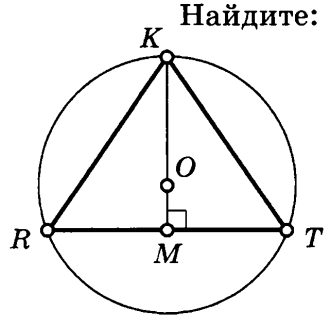
18 Найдите: C



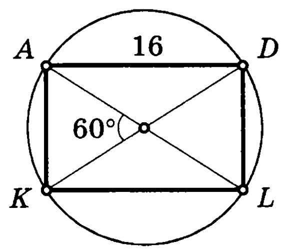
19 $ME = 7\sqrt{5}$
Найдите: C



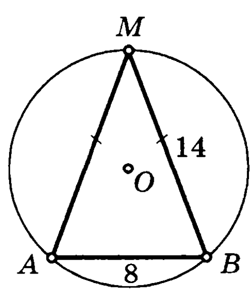
20 $KM = 6$, $RT = 14$
Найдите: C



21 Найдите: C



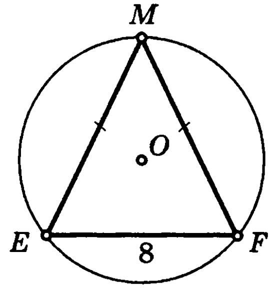
22 Найдите: C



Окончание табл. 10

23

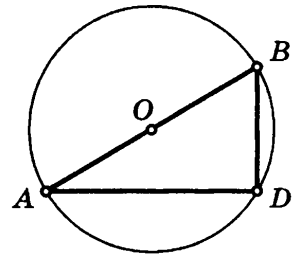
Найдите: C



25

$BD = 12$, $AD = 16$

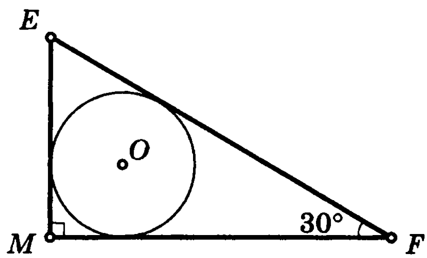
Найдите: C



24

$EF = 16$

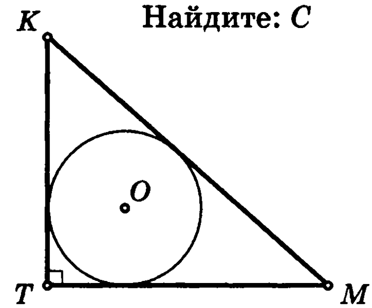
Найдите: C



26

$KM = 6$, $KT = TM$

Найдите: C

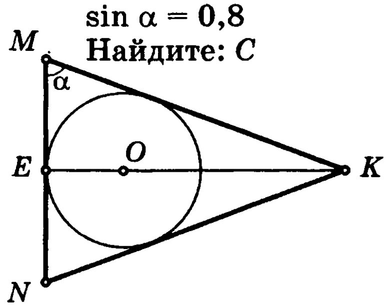


27

$KE = 20$, $KM = KN = 25$

$\sin \alpha = 0{,}8$

Найдите: C



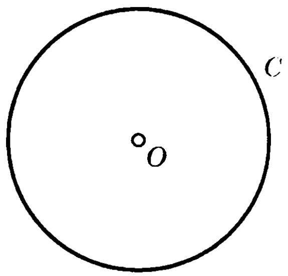
ПЛОЩАДЬ КРУГА

Таблица 11

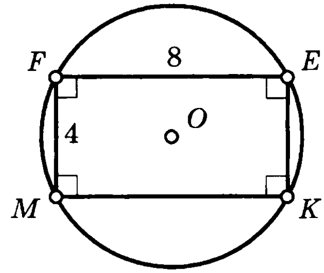
C — длина окружности, l — длина дуги . Найдите $S_{кр}$.

1

$C = 4\sqrt{\pi}$

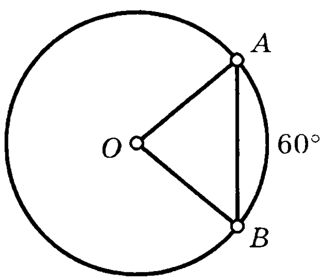


5

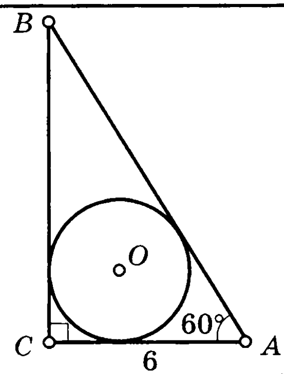


2

$AB = 8$

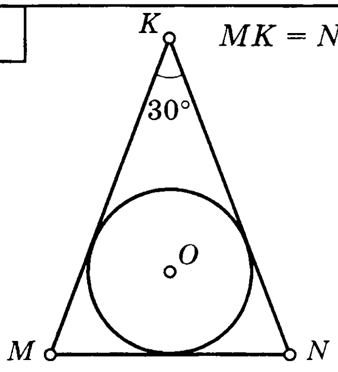


6

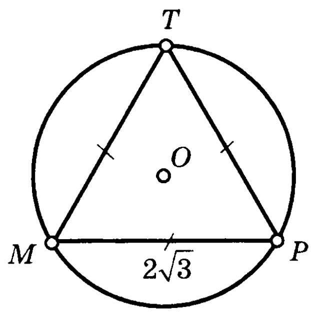


3

$MK = NK = 20$

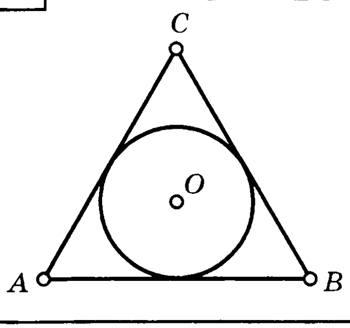


7



4

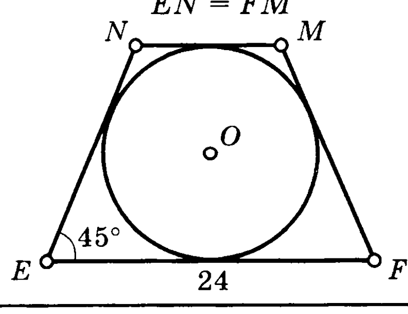
$AB = BC = AC = 12$



8

$ENMF$ — трапеция

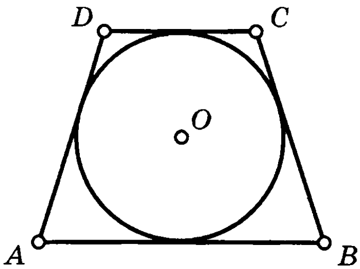
$EN = FM$



Продолжение табл. 11

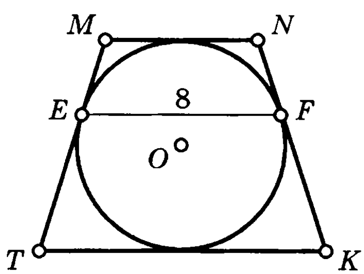
9

$ABCD$ — трапеция
$AD = BC = 6$, $S = 12$



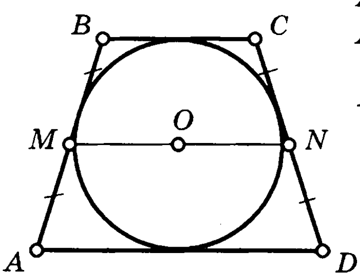
10

$TMNK$ — трапеция
$TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$



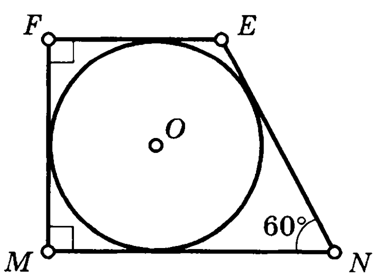
11

$ABCD$ — трапеция
$AB = CD$,
$AD = 2\,BC$,
$MN = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$



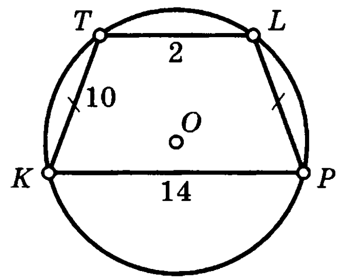
12

$S_{MFEN} = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$



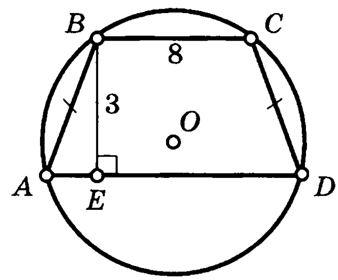
13

$KTLP$ — трапеция



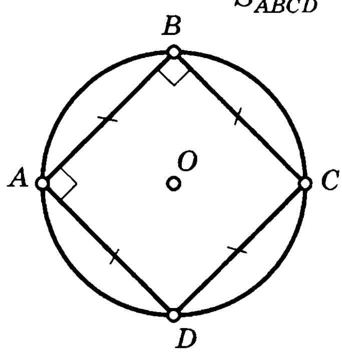
14

$ABCD$ — трапеция
$AD = 10$



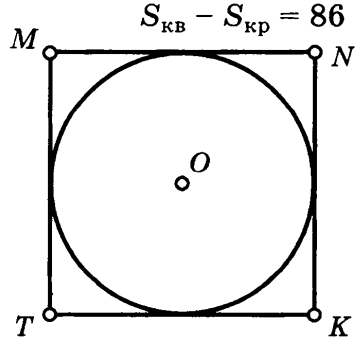
15

$S_{ABCD} = 121$



16

$MNKT$ — квадрат
$S_{кв} - S_{кр} = 86$

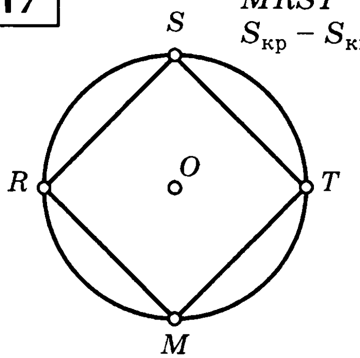


Окончание табл. 11

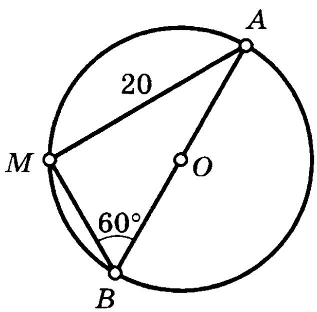
17

$MRST$ — квадрат

$S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}} = 456$

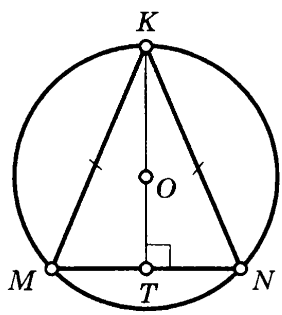


18



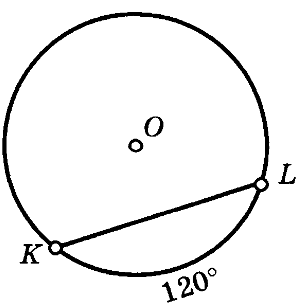
19

$MN = 14$, $KT = 24$



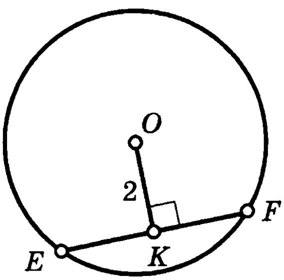
20

$KL = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$



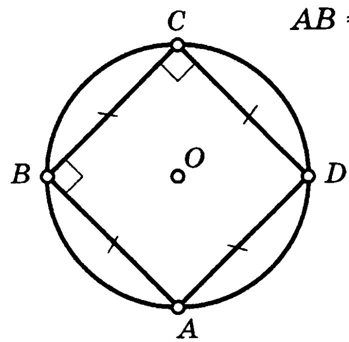
21

$EF = 3$



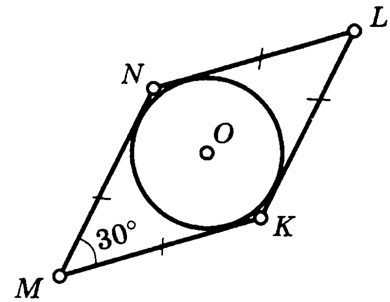
22

$AB = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$



23

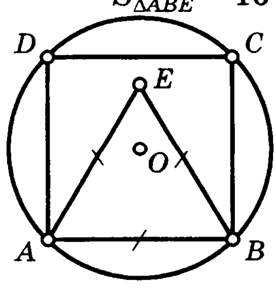
$S_{MKLN} = 40$



24

$ABCD$ — квадрат

$S_{\Delta ABE} = 16\sqrt{3}$

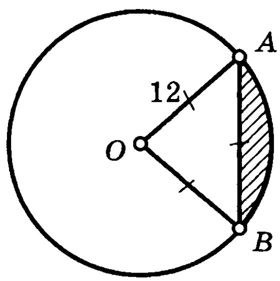


ПЛОЩАДЬ КРУГА

Таблица 12

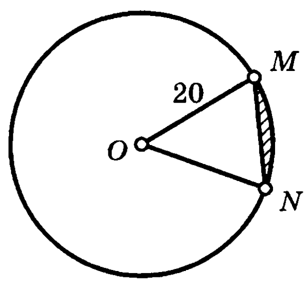
Найдите площадь заштрихованной фигуры.

1

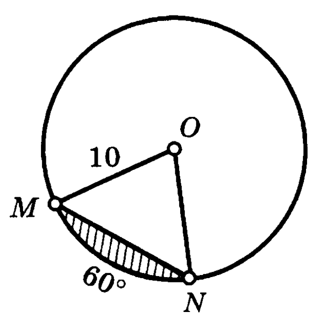


2

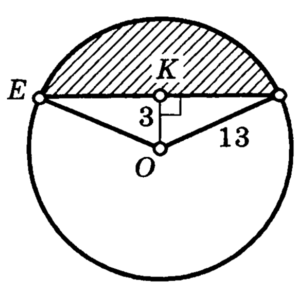
$MN = 12$



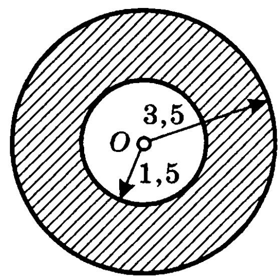
3



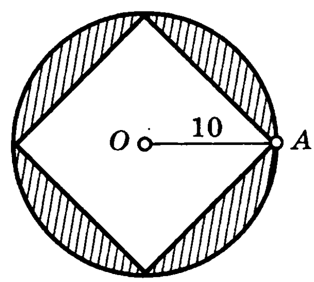
4



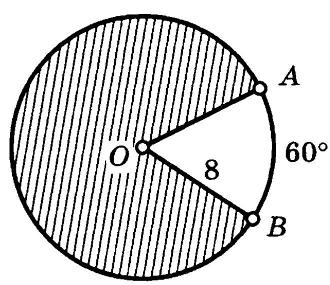
5



6

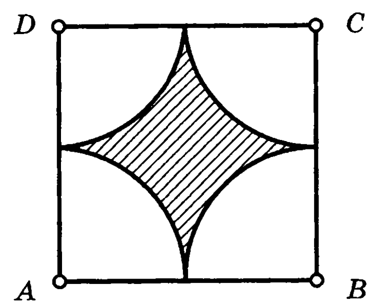


7



8

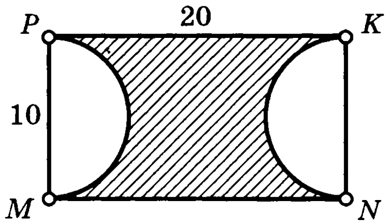
$ABCD$ — квадрат, $AB = 8$



Окончание табл. 12

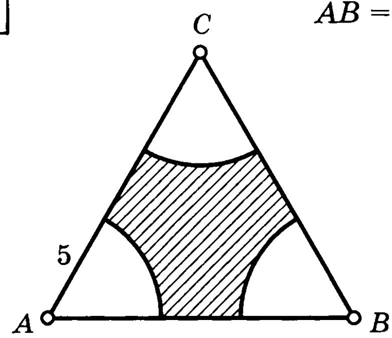
9

$\smile MP = \smile NK = 180°$

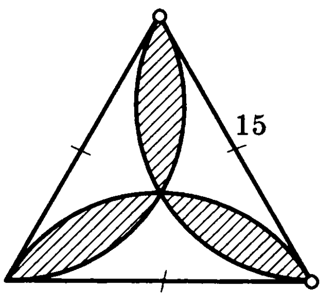


11

$AB = 16$

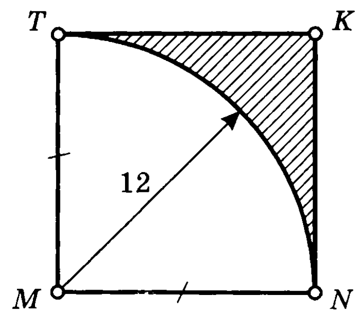


10



12

$MNKT$ — квадрат



Раздел III

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

VII класс

К таблице 1

8. Пусть $\angle POS = \angle SOT = x$, $\angle TOQ = \angle QOR = y$. Так как $\angle POR = 180°$, то $x + x + y + y = 180$, или $x + y = 90$. Значит, $\angle SOQ = x + y = 90°$.
Ответ: 90°.

11. $\angle MSK + \angle PSN = 180° - 90° = 90°$. Так как $\angle MSP = \angle NSK$ (по условию), то $\angle MSK = \angle PSN = 90° : 2 = 45°$, тогда $\angle MSP = \angle MSK + \angle KSP = 45° + 90° = 135°$.
Ответ: 135°.

К таблице 2

5. Пусть $\angle 1 = \angle 3 = x$, $\angle 2 = \angle 4 = y$ (по свойству вертикальных углов), тогда получим $2 \cdot (x + x) = y + y$, откуда $y = 2x$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (по свойству смежных углов). Значит, $x + y = 180$. Так как $y = 2x$, то $x + 2x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$, $y = 120$. Итак, $\angle 1 = \angle 3 = 60°$, $\angle 2 = \angle 4 = 120°$.
Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

11. Пусть $\angle 2 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 1 = 180° - (\angle 2 + \angle 3) = 180 - 2x$. По условию $\angle 1 - \angle 2 = 75°$. Значит, $180 - 2x - x = 75$, откуда $x = 35$, т. е. $\angle 2 = \angle 3 = 35°$, $\angle 1 = 180° - 70° = 110°$.
Ответ: 110°, 35°, 35°.

К таблице 3

17. Так как $AC = BD$, $BC = AD$ (по условию) и AB — общая сторона, то $\Delta ACB = \Delta ADB$ (по III признаку).

Из равенства этих треугольников следует, что $\angle C = \angle D$ и так как $BC = AD$, $AO = BO$, то $CO = OD$. Кроме того, $\angle AOC = \angle BOD$ (как вертикальные). Значит, $\Delta AOC = \Delta BOD$ (по II признаку).

Замечание. $\Delta ACB = \Delta ADB$ по I признаку, так как $AC = BD$, $\angle CAB = \angle ABD$ и AB — общая сторона.

32. 1) $\Delta DOE = \Delta COF$ (по I признаку), тогда $DE = CF$.

2) $\Delta\ DEF = \Delta CFE$ (по III признаку), так как EF — общая сторона, $DE = CF$ (по доказанному), $DF = CE$ по условию ($DO = OC$ и $OE = OF$), тогда $\angle DFE = \angle CEF$.

3) $\Delta DAF = \Delta CBE$ (по I признаку), так как $DF = CE$, $AF = BE$ ($AE = BF$ по условию), EF — общая часть) и $\angle DFA = \angle CEB$ (по доказанному), тогда $AD = BC$.

4) $\Delta AED = \Delta BFC$ (по III признаку).

К таблице 4

14. $P_1 = MK + KS + MS = 12 + 6 + MS = 18 + MS$;
$P_2 = MS + SN + MN = MS + 6 + MN$.
По условию $P_2 - P_1 = 3$, или $MS + 6 + MN - (18 + MS) = 3$,
$MN - 12 = 3$, $MN = 15$.
Ответ: 15.

К таблице 5

17. В ΔAMC $AM = MC$ (по условию), медиана MN является биссектрисой, тогда $\angle AMC = 50° \cdot 2 = 100°$, $\angle CMB = \angle CBA = 180° - 100° = 80°$ ($CB = CM$ по условию).
Ответ: 80°.

К таблице 6

33. Так как ΔQNR — равнобедренный ($QN = QR$) и $\angle NQR = 30°$, тогда $\angle RNQ = \angle NRQ = (180° - 30°) : 2 = 75°$, тогда $\angle KNQ = 30° + 75° = 105°$. Но $\angle NQM = 30° + 45° = 75°$ и, так как $\angle KNQ + \angle NQM = 105° + 75° = 180°$, то $KN \parallel MQ$ (по III признаку параллельности прямых).

К таблице 7

13. *I способ.* $\angle A = \angle 1 + \angle 2 = 60°$, $\angle C = 25°$, тогда $\angle B = 180° - (60° + 25°) = 95°$, значит, $\angle AEB = 180° - (30° + 95°) = 55°$.

II способ. $\angle AEC = 180° - (\angle 2 + \angle C) = 180° - 55° = 125°$, тогда $\angle AEB = 180° - 125° = 55°$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, используя элементы ΔADE.
Ответ: 55°.

К таблице 8

10. Так как $RO \perp PS$ и $PO = OS$, то ΔPRS — равнобедренный, тогда $\angle P = \angle RSP$ (по свойству).

Пусть $\angle TSR = 3x$, $\angle RSP = \angle P = 5x$, тогда $\angle TSP = 3x + 5x = 8x$. Так как $\angle T = 115°$, то получим уравнение $115 + 5x + 8x = 180$, откуда $x = 5$, т. е. $\angle P = 5x = 25°$, $\angle TSP = 8x = 40°$.
Ответ: 25°, 40°.

К таблице 9

30. По условию $MK = KS$, значит, ΔMKS — равнобедренный, тогда $\angle M = \angle MSK = 35°$. Аналогично в ΔSPN $\angle PSN = 25°$. В ΔMSN $\angle MSN = 180° - (35° + 25°) = 120°$. Следовательно, $\angle KSP = \angle MSN - (\angle MSK + \angle PSN) = 120° - 60° = 60°$.
Ответ: 60°.

К таблице 10

10. ΔMKN — равносторонний (по условию), тогда $\angle K = 60°$; $RK \perp PR$, значит, ΔPRK прямоугольный, тогда $\angle RPK = 90° - 60° = 30°$, т. е. $RK = \frac{1}{2}PK$. Но $PK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}MN = 6{,}5$, т. е. $PK = \frac{13}{4} = 3{,}25$ и $NR = 13 - 3{,}25 = 9{,}75$.

Ответ: 9,75.

21. В ΔAME $\angle MAE = 90° - 65° = 25°$. В ΔBCE $\angle CEB = 90° - 40° = 50°$, $\angle BEM = \angle CBE = 40°$, тогда в ΔAEB $\angle BEA = 90° + 40° = 130°$, значит, $\angle EBA = 180° - (25° + 130°) = 25°$, т. е. $BE = AE$.

В ΔAED $\angle DEA = 90°$, $\angle EDA = 45°$, тогда $\angle DAE = 45°$, $AE = DE$. Следовательно, $BE = DE$, значит ΔBED — равнобедренный, где $\angle BED = 40°$, тогда $\angle BDE = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

Ответ: 70°.

К таблице 11

9. Так как $AD = BF$, $DC = CF$ (по условию), то ΔACB — равнобедренный, тогда $\angle A = \angle B$ (по свойству). Значит, $\Delta AED = \Delta BMF$ (по гипотенузе и острому углу).

К таблице 12

16. MN — искомое расстояние. По условию $BC = BM = MA = MC = 8$, значит, ΔBCM — равносторонний, т. е. $\angle CMB = 60°$, тогда $\angle BMA = 180° - 60° = 120°$, и, так как MN — высота равнобедренного ΔAMB, то MN — биссектриса, т. е. $\angle AMN = 60°$, тогда $\angle A = 30°$, значит $MN = \frac{1}{2}MA = 4$.

Замечание. Можно использовать теорему Фалеса и теорему о средней линии треугольника.

Ответ: 4.

VIII класс

К таблице 2

24. В параллелограмме $ABCD$ $\angle D = \angle B = 90°$, тогда $\angle A = \angle DCB = 90°$, т. е. $ABCD$ — прямоугольник и, так как $DC = CB$, то $ABCD$ — квадрат.

Поскольку $\angle MCB = 60°$ и $\angle B = 90°$, то $\angle CMB = 30°$, тогда $CB = \frac{1}{2}MC = 9$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Следовательно, $P = 9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: 36.

К таблице 4

8. Так как $SFTM$ — параллелограмм и $SF = SM$ (по условию), то $SFTM$ — ромб, тогда $ST \perp FM$ и диагонали ST и FM ромба являются биссектрисами его углов. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 10 + x$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, или $10 + x + x = 90$, $2x = 80$, $x = 40$, т. е. $\angle 2 = 40°$, $\angle 1 = 10° + 40° = 50°$, тогда $\angle FSM = \angle FTM = 80°$, $\angle SFT = \angle SMT = 100°$.

Ответ: 80°; 80°; 100°; 100°.

К таблице 5

10. В параллелограмме $\angle R = 90°$, значит, $EMKR$ — прямоугольник. Так как $\angle EFM = 45°$ и $\angle R = \angle M = 90°$, то ΔEMF — равнобедренный и $ME = MF$.

Пусть $FK = x$, тогда $ME = MF = x + 6$ и $MK = 2x + 6$. По условию задачи $P = 36$, тогда имеем уравнение $2((x + 6) + (2x + 6)) = 36$, откуда находим $x = 2$, значит, $ME = KR = x + 6 = 8$, $MK = ER = 2x + 6 = 10$.

Ответ: 8; 8; 10; 10.

К таблице 6

18. Так как $ABCD$ — трапеция, то $AB \parallel NM$, тогда $\angle ANM = 70°$, $\angle NAB = 180° - 70° = 110°$.

Поскольку NB — биссектриса $\angle ANM$ (по условию), то $\angle ANB = \angle BNM = 35°$. Но $\angle BNM = z = 35°$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и NM и секущей BM, тогда $\angle NMB = z + 45° = 80°$ и $\angle ABM = 180° - 80° = 100°$.

Ответ: 110°; 70°; 100°; 80°.

К таблице 8

15. По условию $DE = FC = \frac{1}{2}EF$, т. е. $EF = 2DE = 2FC$. В ΔEKF проведем высоту KM, тогда $EM = MF = DE = FC$. Заметим, что $\Delta ADE = \Delta KME$ ($DE = EM$ и $\angle AED = \angle KEM$; $\angle D = \angle EMK = 90°$) и $\Delta EMK = \Delta FMK$ (по двум катетам). Аналогично $\Delta KMF = \Delta FCB$.

Пусть $DC = 7x$, тогда $AD = 4x$ и $S_{ABCD} = 7x \cdot 4x = 28x^2$. По условию $S_{\Delta EKF} = 28$. Но $EF = DE + FC = \frac{1}{2}DC = \frac{7}{2}x$ и $KM = AD = 4x$, тогда $S_{\Delta EKF} = \frac{1}{2}EF \cdot KM$, или $S_{\Delta EKF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}x \cdot 4x = 28$, или $7x^2 = 28$, $x^2 = 4$, $x = 2$, тогда $S_{ABCD} = 28x^2 = 28 \cdot 4 = 112$.

Замечание. Можно показать, что $S_{ABCD} = 4S_{\Delta EKF}$.

Ответ: 112.

К таблице 9

17. *Указание.* Обозначить $AD = x$, $AB = y$, тогда $2(x + y) = 20$. Пусть S — площадь параллелограмма, тогда $x \cdot 2 \cdot 4 = y \cdot 2 \cdot 6$. Далее решить систему уравнений $x + y = 10$; $2x = 3y$, и т. д.

22. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$, где $AC = 16$, $BD = 12$. Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то $\Delta AOB = \Delta COD$ (по I признаку равенства треугольников) и $\Delta BOC = \Delta AOD$ (по той же причине). Но равные многоугольники имеют равные площади, т. е. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ и $S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$, значит, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta AOB} + 2S_{\Delta BOC} = 2(S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC})$.

Но $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 \sin 60° = \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°$;

$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC \cdot \sin(180° - 60°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_2 \cdot \frac{1}{2}d_1 \sin 60° = \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60° + \frac{1}{8}d_1 d_2 \sin 60°\right) =$

$= \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin 60°$.

Поскольку $d_1 = 16$, $d_2 = 12$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$.

Замечание 1. Фактически мы доказали, что площадь параллелограмма $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

Замечание 2. Полученная формула верна для любого выпуклого четырехугольника.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

К таблице 10

11. Задачу можно решить по формуле Герона. Покажем другое решение, основанное на применении формулы $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, которое приводит к относительно более простым вычислениям.

Проведем высоту BD. Пусть $DC = x$. Из ΔADB $BD^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{18} - x)^2$; из ΔBDC $BD^2 = (\sqrt{10})^2 - x^2$. Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $5 - (\sqrt{18} - x)^2 = 10 - x^2$, откуда после упрощений находим $x = 23/6\sqrt{2}$, тогда $BD^2 = 10 - x^2$, или $BD^2 = \frac{191}{72} = \frac{382}{144}$, откуда $BD = \sqrt{382}/12$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \sqrt{191}/4$.

Ответ: $\sqrt{191}/4$.

12. *Указание.* Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCD$, затем применить свойство $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_1 и d_2 — диагонали, a и b — смежные стороны параллелограмма.

Замечание. Задачу можно решить и по формуле $S = \frac{1}{2}a \cdot h$ (см. № 11).

19. *Указание.* $\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{DC \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{5}{12}$. Далее обозначить $S_{\Delta DEC} = x$, $S_{\Delta ABC} = y$ и решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{12}, \\ x + y = 51. \end{cases}$

К таблице 11

18. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$. Проведем высоту MN. По условию задачи $S_{\Delta AMD} = 120$, или $\frac{1}{2}AD \cdot MN = 120$, или $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = 120$, $xh = 120$, где $h = MN$ — высота ΔAMD (и трапеции). $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}BM \cdot h\right) + S_{\Delta AMD} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}MC \cdot h\right) = \frac{1}{2}xh + 120$.

Так как $xh = 120$, то $S_{ABCD} = 180$.

Замечание. Нетрудно заметить, что $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta MCD} = \frac{1}{4}xh$ и $S_{\Delta AMD} = xh$, т. е. $S_{\Delta AMD} = 2(S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MCD})$.

20. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, где $AD = BC$. Так как $AC \perp BD$ (по условию), то $S = S_{\Delta DAC} + S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD + \frac{1}{2}AC \cdot OB = \frac{1}{2}AC \cdot (OD + OB) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Но $AC = BD = 8$, тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$.

Замечание. Фактически мы доказали, что «если в трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей. В частности, если трапеция равнобедренная, то $d_1 = d_2 = d$, тогда $S = \frac{1}{2}d^2$».

26. По условию задачи $S_{\Delta BOC} = 4$ м^2 и $S_{\Delta AOD} = 25$ м^2. Заметим, что $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ (доказать самостоятельно).

Тогда $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOD} : S_{\Delta COD}$, откуда находим $S^2_{\Delta AOB} = S^2_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD} = 100$, тогда $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = 10$ (м^2), значит $S = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} + 2S_{\Delta AOB} = 4 + 25 + 2 \cdot 10 = 49$.

Ответ: 49.

К таблице 12

42. Пусть $TL = a$, $MT = b$, тогда $P_{MKLT} = 2(a + b) = 40$, или $a + b = 20$. Заметим, что $S_{MKLT} = TL \cdot 2CO = MT \cdot 2BO$, где $BO = x$, значит, $8a = 2bx = 48$, $a = 6$, $b = 20 - 6 = 14$, тогда $2bx = 48$, $x = \frac{12}{7}$.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

45. Пусть $LT = a$, $RQ = b$, тогда $MT = \frac{1}{2}(a - b)$. По условию $S_{LRQT} = \frac{a+b}{2} \cdot x$, где $QM = x$ — высота трапеции, $S_{LRQT} = 300$, или $\frac{a+b}{2} \cdot x = 300$, $(a + b)x = 600$. $LM = LT - MT = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)^2$.

Но $a + b = \frac{600}{x}$, тогда $LM = \frac{300}{x}$. Из ΔLMQ имеем $\left(\frac{300}{x}\right)^2 + x^2 = 625$, или $\frac{90000}{x^2} + x^2 = 625$.

Решая полученное биквадратное уравнение, находим $x_1 = 15$; $x_2 = 20$.

Ответ: 15; 20.

50. *Указание.* Из точки C провести прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке E. Далее доказать, что ΔACE — прямоугольный.

54. *Указание.* Провести высоту DE, обозначив $AE = y$, где $y = \frac{1}{2}(20 - x)$.

Для нахождения $DC = x$, составить систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(20 - x), \\ y^2 + h^2 = 13^2, \\ (20 + x)h = 360, \end{cases}$$

в результате чего получится уравнение $(20 + x)^2(6 + x)(46 - x) = 720^2$, а после упрощений решить уравнение $x^4 - 1476\,x^2 - 27\,040\,x + 408\,000 = 0$. Далее доказать, что $x = 10$ — единственный корень.

Ответ: 10.

К таблице 13

22. Пусть $QN = a$, $QE = EF = b$, $EM = c$. Так как $QE = EF$, то ΔQEF — равнобедренный, тогда $\angle FQE = \angle QFE$. Но $EF \perp NM$ и $QN \perp NM$, значит, $QN \parallel EF$, тогда $\angle NQF = \angle EFQ$, т. е. QF — биссектриса $\angle NQM$, следовательно, $\frac{NF}{FM}=\frac{QN}{QM}$, или $\frac{a}{b+c}=\frac{4}{5}$.

Из подобия ΔMFE и ΔMNQ, имеем $\frac{b+c}{8+10}=\frac{c}{10}$, или $\frac{b+c}{9}=\frac{c}{5}$.

Кроме того, из ΔMFE $c^2 - b^2 = 100$.

Решая систему $\begin{cases}\frac{b+c}{9}=\frac{c}{5},\\ c^2-b^2=100,\end{cases}$ находим $c=\frac{50}{3}$, $b=\frac{40}{3}$; так как $\frac{a}{b+c}=\frac{4}{5}$, то $a = 24$. Значит, $P_{\Delta MNQ} = x = a + b + c + 18 = 72$.

Ответ: 72.

36. Пусть $AD = a$, $DC = b$. По условию $AC = BC = a + b$, $AC - AB = 4{,}8$ и $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$.

По свойству биссектрисы $\frac{a}{b}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{a+b}$ и $(a + b) - AB = 4{,}8$, откуда $AB = (a + b) - 4{,}8$, тогда $\frac{a}{b}=\frac{AB}{a+b}=\frac{3}{5}$, $AB = \frac{3}{5}(a + b)$, значит, $\frac{3}{5}(a + b) = (a + b) - \frac{24}{5}$, или $a + b = 12$.

Так как $P_{\Delta ABC} = x$, то $x = AB + 2AC = \frac{a}{b}(a + b) + 2(a + b) = \frac{3}{5}\cdot 12 + 2 \cdot 12 = 12\cdot\left(\frac{3}{5}+2\right)=\frac{156}{5} = 31{,}2$.

Ответ: 31,2.

К таблице 14

24. Пусть $\angle E = \angle 4$, тогда в ΔMEL $\angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$; $\angle MLF = \angle 5$, тогда $\angle 5 = \angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle 3$; $\angle F = 180° - (\angle 2 + \angle 5) = 180° - (\angle 2 + 180° - \angle 3) = \angle 3 - \angle 2$.

Так как $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (по условию), то $\angle F = \angle 1$, значит, $\Delta EML \sim \Delta MEF$ (по I признаку), тогда $EL : EM = EM : EF$, или $x^2 = 8 \cdot 18$, $x = 12$.

Ответ: 12.

28. Поскольку $BC \parallel AD$, то $ABCD$ — трапеция, тогда $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по I признаку). Следовательно, $\frac{x}{y} = k$, где k — коэффициент подобия. По условию $S_{\Delta BOC} : S_{\Delta AOD} = 1 : 9$, или $k^2 = \frac{1}{9}$; $k = \frac{1}{3}$. Значит, $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$, откуда $y = 3x$. Но $x + y = 9{,}6$, тогда $3x + x = 9{,}6$, $x = 2{,}4$; $y = 2{,}4 \cdot 3 = 7{,}2$.

Ответ: $x = 2{,}4$; $y = 7{,}2$.

К таблице 17

15. Через вершину N проведем прямую $NA \parallel ME$ до пересечения с продолжением TK в точке A. Заметим, что ΔTNA — прямоугольный. Кроме того, $S_{\Delta TNA} = S_{TMNA}$ (доказать самостоятельно).

Пусть $MN = x$, $TE = y$. Из ΔMEK $EK = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$;

$S_{TMNA} = \frac{1}{2}(x + y + 12) \cdot 9$.

С другой стороны, $S_{TMNA} = S_{\Delta TNA} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot TN$, где $TN^2 = 81 + (x + y)^2$.

Значит, $\frac{15}{2}TN = \frac{9}{2}(x+y+12)$, откуда $TN = \frac{3}{5}(x + y + 12)$, тогда $\frac{9}{25}(x + y + 12)^2 = 81 + (x + y)^2$, или, после упрощений имеем $16(x + y)^2 - 216(x + y) + 729 = 0$, или $(4(x + y) - 27)^2 = 0$, откуда находим $x + y = \frac{27}{4}$, тогда $S_{TMNK} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{27}{4} + 12\right) = \frac{675}{8} = 84{,}375$.

Ответ: 84,375.

К таблице 18

13. *Указание.* Из вершины B опустить высоту на сторону AC.

К таблице 19

17. *Указание.* Учесть, что $AD = BD = CD = R$, где R — радиус описанной окружности с центром в точке D.

21. Так как CF — медиана ΔABC и $\angle ACB = 90°$, то $FA = FC = FB = 6$ — радиус описанной окружности. Из ΔCEF $CE = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$; из ΔAEC находим $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2}$, или $AC = \sqrt{36\sqrt{3} + 72} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Тогда $\sin \angle A = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\cos \angle A = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$.

Замечание. Можно показать, что $2+\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2$, тогда

$\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ и $\cos \angle A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

К таблице 20

19. Пусть E — точка касания касательной AB к окружности, тогда $NA = AE$ и $BE = BK$. По условию $P_{\Delta MAB} = 48$, или $MA + MB + AB = 48$, где $AB = AE + EB = AN + BK$, тогда $MA + MB + AN + BK = (MA + AN) + (MB + BK) = MN + MK = 48$. Но $MN = MK$, тогда $MN = MK = 24$.

Ответ: $MN = MK = 24$.

К таблице 21

9. *Указание.* Предварительно доказать, что $\angle EAF = \dfrac{1}{2}(\smile EF - \smile BC)$.

45. *Указание.* Учесть, что $\angle BMC = \dfrac{1}{2}(\smile BC + \smile AD)$.

54. *Указание.* Пусть $\smile AB = 10k$, тогда $\smile CA = 12k$. Далее решить уравнение $10k + 12k + 140 = 360$.

К таблице 22

13. *Указание.* Продолжить RK до пересечения с основанием MN в точке P. Далее учесть, что по свойству медиан $RK = 2KP$.

17. Из прямоугольного ΔMDC, где $MC = 26$, $MD = \dfrac{1}{2}MN = 10$, имеем:

$CD = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.

По условию O_1 — точка пересечения медиан ΔCMN. Пусть $O_1D = x$, тогда $O_1C = 2x$, тогда $x + 2x = 24$, откуда $x = 8$, $O_1C = 2x = 16$.

Пусть $OD = y$, получим $OO_1 = DC - (2x + y) = 24 - (16 + y) = 8 - y$. Заметим, что $S_{\Delta MNC} = \dfrac{1}{2}MN \cdot DC = \dfrac{1}{2}MC \cdot NB$, или $20 \cdot 24 = 26 \cdot NB$, откуда находим $NB = \dfrac{240}{13}$.

Ответ: $\dfrac{240}{13}$.

К таблице 23

11. Так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = \sqrt{24^2+10^2} = 26$. Пусть $OD = r$ — радиус вписанной окружности. Заметим, что $BM = BN$, $AN = AD$ и $MC = CD = OD = r$. Пусть N — точка касания AB и окружности, тогда $AB = BN + AN = BM + AD = (BC - r) + (AC - r) = AC + BC - 2r$, откуда находим $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = 4$.

Ответ: 4.

21. $RT = 13 + 5 = 18$. $S_{\Delta REF} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot EF = 9EF$. Пусть $RE = RF = x$, $ET = TF = y$, тогда $S_{\Delta REF} = 18y$. Из ΔERT $x^2 - y^2 = 18^2$. Кроме того, $S_{\Delta REF} = \frac{abc}{4R}$, где $a = b = RE = x$, $c = EF = 2y$, $R = 13$ — радиус описанной окружности. Значит, $S_{\Delta REF} = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 13} = 18y$, откуда $x^2 = 26 \cdot 18$.

Но $x^2 - y^2 = 18^2$, тогда $y^2 = 18 \cdot (26 - 18) = 144$, $y = 12$, тогда $S_{\Delta REF} = 18 \cdot 12 = 216$.

Ответ: 216.

36. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $r = 4$, тогда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ (см. № 11), или $\frac{1}{2}(a + b - 20) = 4$, где $c = AM + MB = 20$. Значит, $a + b = 28$.

Кроме того, $a^2 + b^2 = 400$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} a^2+b^2=400, \\ a+b=28, \end{cases}$

$(a + b)^2 = 400 + 2ab$, или $400 + 2ab = 784$, откуда $ab = 192$.

Значит, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = 96$.

Ответ: 96.

42. Поскольку $QP = 4$, $QM = 2$ и $QM \perp PM$, то $\angle P = 30° \Rightarrow \smile QR = 60°$, значит, $\angle O = 60°$. Так как $QO = OR$, то $\angle OQR = \angle ORQ = 60°$, т. е. ΔQOR — равносторонний, тогда $OR = 6$.

Ответ: 6.

44. *I способ.*

В равнобедренном ΔABC $AC = BC = 10$, OM — радиус вписанной окружности, тогда $OM \perp AB$. Проведем высоту MC, тогда в ΔAMC $\cos \angle A = \frac{AM}{AC} = 0{,}6$, значит, $AM = 10 \cdot 0{,}6 = 6$, тогда $AB = 12$. По теореме Пифагора $MC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot MC$, а с другой стороны, $S_{\Delta ABC} =$ $= p \cdot r = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) \cdot OM$, тогда $12 \cdot 8 = (10 + 10 + 12) \cdot OM$, откуда $OM = 96 : 32 = 3$.

Ответ: 3.

II способ.

Пусть K — точка касания окружности и касательной AC. Заметим, что $\Delta AMC \sim \Delta CKO$ (как прямоугольные, имеющие общий острый $\angle ACM$). Из подобия имеем: $\frac{AM}{MC} = \frac{KO}{KC}$, где $AM = 6$, $MC = 8$. Кроме того, $KC = 10 - AK = 10 - AM = 4$, значит, $KO = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3$. Но $KO = OM$, т. е. $OM = 3$.

Ответ: 3.

48. Проведем высоту KM на основание EF, тогда в равнобедренном ΔKEF ($KE = KF$), высота KM является и медианой, т. е. $EM = MF = 24$. $S_{\Delta EKF} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot KM = 24KM$; с другой стороны, $S_{\Delta EKF} = \frac{abc}{4R}$, где $a =$ $= EK$, $b = KF$, $c = EF$, $R = EO = 25$, тогда имеем: $24 \cdot KM = \frac{KE \cdot KF \cdot 12}{25}$.

Пусть $KM = h$, $KE = KF = x$, тогда $24 \cdot h = \frac{12x^2}{25}$, или $x^2 = 50h$. Из ΔKME $x^2 = h^2 + 24^2$, тогда получим $50h = h^2 + 576$, или $h^2 - 50h + 576 = 0$, откуда находим $h_1 = 18$, $h_2 = 32$. Значит, $x^2 = 50 \cdot 18 = 900$, откуда $x = 30$, или $x^2 = 32 \cdot 50 = 1600$, $x = 40$. Следовательно, $EK = 30$, или $EK = 40$.

Ответ: 30, или 40.

59. *I способ.*

Проведем высоту трапеции BE. Так как $\angle A = 60°$, то $\angle ABE = 30°$. Точка O — центр вписанной окружности, значит, AO — биссектриса угла A, т. е. $\angle OAK = 30°$, тогда $\Delta ABE \sim \Delta AOK$ как прямоугольные, имеющие равные острые углы.

Пусть $AD = 2x$, $BC = 2y$, $MN = 20$, тогда $(2x + 2y) : 2 = 20$, или $2x +$ $+ 2y = 40$.

Но $AB + CD = BC + AD$ (по свойству описанного четырехугольника), или $2AB = 2x + 2y = 40$, $AB = 20$. Следовательно, $AB : BE = AO : AK$, или $10 : OK = AO : x$. Из ΔAOK, где $\angle OAK = 30° \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AO$, тогда $AO =$ $= 2 \cdot OK$, т. е. $10 : OK = 2 \cdot OK : x^2$.

Но $\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{x}{OK} \Rightarrow x = OK\sqrt{3}$, тогда $\dfrac{10}{OK} = \dfrac{2 \cdot OK}{OK\sqrt{3}}$, или $\dfrac{5}{OK} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

II способ.

$MN = 20$, $x + y = 10$, $2AB = 40$, $AB = 20$ (см. I способ).

Из ΔBEA $\cos 30° = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{2 \cdot OK}{20} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

63. По условию $MNRK$ — прямоугольная трапеция. Заметим, что $\angle N + \angle R = 180°$ (как сумма односторонних углов). Но точка O — центр вписанной окружности, OR и ON — соответственно биссектрисы углов R и N, тогда $\angle ORN + \angle ONR = 90°$, т. е. ΔRON — прямоугольный, значит $RN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Высота ΔRON равна радиусу вписанной в трапецию окружности, тогда высота трапеции равна диаметру этой окружности. Пусть OT — высота ΔORN, тогда $S_{\Delta RON} = \dfrac{1}{2} OR \cdot ON = \dfrac{1}{2} RN \cdot OT$, или $6 \cdot 8 = 10 \cdot OT$, откуда $OT = 4{,}8$, значит, $RE = 2 \cdot OT = 9{,}6$, где RE — высота трапеции, опущенная на основание MN.

Но $MN + KR = KM + RN$ (по свойству описанного четырехугольника), значит, $KM + RN = RE + RN = 19{,}6$, тогда $S_{MNRK} = \dfrac{1}{2}(MN + KR) \cdot RE = \dfrac{1}{2}(KM + RN) \cdot RE = \dfrac{19{,}6}{2} \cdot 9{,}6 = 94{,}08$.

Ответ: 94,08.

67. Проведем высоты EF и QK на основание MT. Так как $EQ \parallel MT$, то $MTQE$ — трапеция (равнобедренная). По условию MQ — биссектриса $\angle M$. Заметим, что $\angle QMT = \angle MQE = 30°$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MT и EQ и секущей MQ). Тогда $\angle EMQ = \angle MQE = 30°$, т. е. ΔMQE — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть $EQ = 2x$, $MT = 2y$, $ME = EQ = 2x$.

Из ΔMEF $MF = \dfrac{1}{2} ME = x$, $EF = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.

Из ΔMQK $MQ = 2 \cdot QK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}$.

$S_{\Delta MQT} = \dfrac{1}{2} MT \cdot QK = \dfrac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = xy\sqrt{3}$; с другой стороны,

$S_{\Delta MQT} = \dfrac{MQ \cdot QT \cdot MT}{4 \cdot QO}$, или $S_{\Delta MQT} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, значит, $xy\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2y$, откуда $x = 4$.

Следовательно, $S_{MTQE} = \dfrac{1}{2}(MT + QE) \cdot EF = (x + y) \cdot x\sqrt{3}$.

Но $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 4x$, или $2y = 4x$, $y = 8$, значит, $S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

76. Так как $EF \parallel TR$, то $TRFE$ — трапеция. По свойству описанного четырехугольника $TR + EF = ET + FR$, или $TR + EF = 28$. Но $TR - EF = 14$. Пусть $TR = x$, $EF = y$, где $x > 0$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ x - y = 14; \end{cases} \begin{cases} 2x = 42, \\ 2y = 14; \end{cases} \begin{cases} x = 21, \\ y = 7. \end{cases}$$

Итак, $TR = 21$, $EF = 7$.

Проведем высоты AE и FB трапеции. Пусть $TA = z$, тогда $AB = EF = 7$, $BR = 21 - (z + 7) = 14 - z$.

Из ΔTAE $EA^2 = 13^2 - z^2$; из ΔFBR $FB^2 = 15^2 - (14 - z)^2$. Так как $EA = FB$, то $13^2 - z^2 = 15^2 - (14 - z)^2$, или $(14 - z)^2 - z^2 = 15^2 - 13^2$, откуда находим $z = 5$, тогда $EA^2 = 13^2 - 5^2$, $EA = 12$.

Значит, $S_{TRFE} = \dfrac{1}{2}(TR + EF) \cdot EA = \dfrac{1}{2} \cdot 28 \cdot 12 = 168$.

Ответ: 168.

83. $ABCD$ — ромб (по условию). Пусть $AB = x$, тогда $P = 4AB = 4x = 80$, откуда $x = 20$. Так как $AC = 32$, то $AO = 16$. Из ΔAOE $AO^2 = AE^2 + OE^2$, или $AE^2 + OE^2 = 256$. Так как $AC \perp BD$ (по свойству ромба), то ΔAOB — прямоугольный и, так как $OE \perp AB$, то $AO^2 = AB \cdot AE$, или $16^2 = 20 \cdot AE$, откуда $AE = 64/5$.

Значит, $\left(\dfrac{64}{5}\right)^2 + OE^2 = 16^2$, или $OE^2 = \left(16 - \dfrac{64}{5}\right)\left(16 + \dfrac{64}{5}\right)$, или $OE^2 = \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{144}{5}$, откуда $OE = \dfrac{4 \cdot 12}{5} = 9{,}6$.

Ответ: 9,6.

86. Угол A правильного шестиугольника равен: $\angle A = 180° \cdot (6 - 2) : 6 = 120°$; AO — биссектриса $\angle A$, т. е. $\angle OAM = 60°$, где M — точка касания с окружностью. Из ΔAOM $OM = AO \cdot \sin 60° = 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Но $OM = \dfrac{1}{2}AB$, тогда $AB = 15$.

Ответ: 15.

К таблице 24

20. Пусть $EA = 2x$, $AF = 5x$, тогда $EF = 7x$. По правилу треугольника $\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{KF}$, или $\overrightarrow{KE}+7\vec{x}=\vec{n}$.

Аналогично $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{KF}$, или $\vec{m}+5\vec{x}=\vec{n}$; $\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{KA}$, или $\overrightarrow{KE}+2\vec{x}=\vec{m}$, откуда $\overrightarrow{KE}=\vec{m}-2\vec{x}$. Так как $\overrightarrow{KE}+7\vec{x}=\vec{n}$, то $\vec{m}-2\vec{x}+7\vec{x}=\vec{n}$, или $5\vec{x}=\vec{n}-\vec{m}$, откуда $\vec{x}=-\frac{1}{5}\vec{m}+\frac{1}{5}\vec{n}$, значит, $\overrightarrow{KE}=\vec{m}-2\cdot\left(-\frac{1}{5}\vec{m}+\frac{1}{5}\vec{n}\right)=$ $=\frac{7}{5}\vec{m}-\frac{2}{5}\vec{n}$.

Ответ: $\overrightarrow{KE}=\frac{7}{5}\vec{m}-\frac{2}{5}\vec{n}$.

23. Поскольку M — середина AC, то $AM = MC$; аналогично $BN = ND$.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$, что и требовалось доказать.

30. По условию $MNKE$ — прямоугольная трапеция, где $MK = 2\sqrt{2}$, $\angle MKN = 45°$ и $\angle MKE = 90°$.

Проведем высоту KF к основанию ME. Заметим, что $\angle MKN = \angle KME =$ $= 45°$, как внутренние накрестлежащие углы при параллельных прямых NK и ME и секущей MK. Но тогда $\angle E = 45°$, т. е. ΔMKE — равнобедренный, и $MK = KE$. Кроме того, $NM = KF$ (как высоты трапеции) и $NM \parallel KF$, значит, $|\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{MN}| =$ $= |\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{FK}|=|\overrightarrow{FE}|$.

Из ΔMKE, где $\angle MKE = 90°$, $MK = KE = 2\sqrt{2}$, $ME^2 = (2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2 = 16$, откуда $ME = 4$. Тогда $FE = 2$, значит, $|\overrightarrow{FE}| = 2$.

Ответ: 2.

35. Из точки C проведем $CF \parallel AB$ и соединим точки B и F. Из точки C проведем $CE \parallel BF$, тогда $AF = FE = BC = 5$ (по построению) и $ED =$ $= AD - (AF + FE) = 3$.

Действительно, $\vec{a} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{ED}$. Значит, $|\vec{a}| = |\overrightarrow{ED}| = 3$.

Ответ: 3.

К таблице 25

11. Проведем высоту CE трапеции $ABCD$, где $AB = CD$, $AC = 16$, тогда $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Пусть $DE = x$, $BC = y$, тогда $MN = \frac{1}{2}(2x + 2y) = x + y$.

Так как $\angle CAD = 60°$, то $\angle ACE = 30° \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AC = 8$. Но $AE = x + y$, значит, $x + y = 8$ и $MN = AE = 8$.

Ответ: 8.

16. Проведем высоту FT трапеции $CEFK$, где $CE = FK$, $MN = 4$, $S_{CEFK} = 8$. $S_{CEFK} = \frac{1}{2}(CK + EF) \cdot FT = 8$, или $MN \cdot FT = 8$, где $MN = \frac{1}{2}(CK + EF) = 4$, значит, $4FT = 8$, $FT = 2$.

Пусть $EF = x$, $CK = y$, тогда $TK = \frac{1}{2}(y - x)$, $CT = CK - TK = y - \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}(x + y) = MN = 4$.

Из ΔCFT $\operatorname{tg} \alpha = \frac{FT}{CT} = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

20. Поскольку O — центр вписанной окружности, то MO и NO — биссектрисы углов KNM и LMN, тогда

$\angle OMN + \angle ONM = \frac{1}{2}(\angle KNM + \angle LMN) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, т. е.

$\angle MON = 90°$, тогда $MN = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Заметим, что высота OA ΔOMN является одновременно и радиусом вписанной окружности.

Тогда $S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OA \cdot MN = \frac{1}{2}OM \cdot ON$, откуда $OA = 4{,}8$ (OA — высота ΔOMN, опущенная на MN). Значит, $KL = 2 \cdot OA = 9{,}6$, так как $KL = 2r$ — диаметр вписанной окружности. По свойству описанного четырехугольника $KN + LM = KL + MN = 10 + 9{,}6 = 19{,}6$, тогда

$EF = \frac{1}{2}(KN + LM) = 9{,}8.$

Ответ: 9,8.

23. Пусть $BC = x$, $CD = 2x$, $AD = y$. Так как EF — средняя линия трапеция $ABCD$, то $\frac{x+y}{2} = 20$, или $x + y = 40$. Из ΔADC, где $\angle ADC = 90°$, имеем: $AC = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

Проведем высоту BM, тогда из ΔDMB $DB = \sqrt{BM^2 + DM^2}$, где $BM = CD = 2x$; $DM = x$, тогда $DB = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$.

Так как $AC \perp BD$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ (см. № 478 «Геометрия 7–9» *Л.С. Атанасян* и др.). $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5}$. С другой стороны, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$, тогда получим $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$, или $\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y)$, $x \neq 0$.

Но $x + y = 40$, тогда $\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80$, или $4x^2 + y^2 = 1280$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 + (40 - x)^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$

Упрощая первое уравнение системы, получим $x^2 - 16x + 64 = 0$, или $(x - 8)^2 = 0$, откуда $x = 8$. Значит, $BC = x = 8$.

Ответ: 8.

26. Предварительно докажем, что «если в трапеции сумма углов при основании равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности».

Пусть точки K и F — середины оснований AD и BC. Пусть $AD = 2x$ и $BC = 2y$. Проведем $KE \parallel AB$ и $KL \parallel CD$. Заметим, что $\angle KEF = \angle A = 70°$ и $\angle KLF = \angle D = 20°$, тогда $\angle EKL = 90°$, т. е. ΔEKL — прямоугольный и KF — медиана ΔEKL и, значит, $KE = KF = FL = \frac{1}{2}EL = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

Следовательно, $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$, или $x - y = 2$.

Кроме того, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$, или $x + y = 4$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2 \end{cases}$ способом сложения, находим $2x = 6$, $2y = 2$, т. е. $AD = 6$, $BC = 2$.

Ответ: $BC = 2$, $AD = 6$.

IX класс

К таблице 1

6. а) Так как векторы $\overrightarrow{FN}$ и $\overrightarrow{FO}$ сонаправлены, то $k \geq 0$, значит,

$$k = \frac{|\overrightarrow{FN}|}{|\overrightarrow{FO}|} = \frac{|\overrightarrow{FN}|}{\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{FN}\right|} = \frac{FN}{\frac{1}{2}FN} = 2.$$

б) Аналогично имеем: $k \geq 0$, $k = \frac{|\overrightarrow{MO}|}{|\overrightarrow{ME}|} = \frac{\frac{1}{2}ME}{ME} = \frac{1}{2}$.

в) Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{NF}$ противоположно направлены, значит, $k < 0$, тогда $k = -\frac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{NF}|} = -\frac{\frac{1}{2}NF}{NF} = -\frac{1}{2}$.

г) $k < 0$, $FM = NE$, $k = -\frac{|\overrightarrow{FM}|}{|\overrightarrow{NE}|} = -\frac{FM}{NE} = -1$.

д) $k < 0$, $MN = EF$, $k = -\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{EF}|} = -\frac{MN}{EF} = -1$.

е) $k < 0$, $FA = AO = \frac{1}{2}FO = \frac{1}{4}FN$; $k = -\frac{|\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{NF}|} = -\frac{\frac{1}{4}FN}{FN} = -\frac{1}{4}$.

ж) $k \geq 0$, $FA = \frac{1}{4}FN$, $AN = 3FA = \frac{3}{4}FN$, $k = \frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{FA}|} = \frac{\frac{3}{4}FN}{\frac{1}{4}FN} = 3$.

з) $k < 0$, $NA = FN - FA = FN - \frac{1}{4}FN = \frac{3}{4}FN$, $k = -\frac{|\overrightarrow{FN}|}{|\overrightarrow{NA}|} = -\frac{FN}{\frac{3}{4}FN} = -\frac{4}{3}$.

и) Так как стороны NE и EF параллелограмма не параллельны, то векторы $\overrightarrow{NE}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны, т. е. число k не существует.

к) Аналогично и) число k не существует.

Ответ: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1; д) -1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число k не существует.

К таблице 2

14. Пусть D — середина отрезка AB, тогда

$x_D = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + 7) = 4$; $y_D = \frac{1}{2}(2 + 10) = 6$.

Значит, $D(4; 6)$. Но точка C — середина отрезка AD, тогда

$x_C = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2{,}5$; $y_C = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4$, т. е. $C(2{,}5; 4)$.

Ответ: (2,5; 4).

16. По условию $EK = KF$. Но $EK = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 4}$;

$KF = \sqrt{(6-x)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{(6-x)^2 + 100}$.

Значит, $\sqrt{(x-2)^2 + 4} = \sqrt{(6-x)^2 + 100}$, или $(x - 2)^2 + 4 = (6 - x)^2 + 100$, откуда находим $x = 16$.

18. Координаты вершин параллелограмма $OACB$: $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $C(x; y)$, $B(3; 2)$.

Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, то $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{OB}\{3 - 0; 2 - 0\} = \overrightarrow{AC}\{x - 6; y - 0\}$; $\overrightarrow{OB}\{3; 2\} = \overrightarrow{AC}\{x - 6; y\}$.

Так как $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, то $3 = x - 6$; $2 = y$, т. е. $x = 9$; $y = 2$.

Значит, координаты точки $C(9; 2)$.

Тогда $AC = \sqrt{(9-6)^2+(2-0)^2} = \sqrt{13}$; $OC = \sqrt{9^2+2^2} = \sqrt{85}$.

Ответ: $AC = \sqrt{13}$; $OC = \sqrt{85}$; $C(9;\ 2)$.

20. Координаты вершин трапеции $OABC$: $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 4)$, $B(x;\ y)$, $C(12;\ 0)$. Так как $AB \parallel Ox$, то $\overrightarrow{AB}\,\{5;\ 0\}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AB}\,\{x-2;\ y-4\}$, тогда имеем: $x - 2 = 5$; $y - 4 = 0$, т. е. $x = 7$; $y = 4$. Значит, точка B имеет координаты $(7;\ 4)$. Следовательно, $CB = \sqrt{(7-12)^2+(4-0)^2} = \sqrt{41}$; $OB = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$.

Ответ: $BC = \sqrt{41}$, $OB = \sqrt{65}$.

К таблице 3

5. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы AC совпало с осью Ox, BD — с осью Oy, а точка D — с началом координат. Найдем координаты точки E — середины отрезка BC:

$$x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(0 + 16) = 8;\ y_E = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6.\ \text{Значит, } E(8;\ 6).$$

Так как $\angle ABD = 45°$ и $\angle ADB = 90°$, то $\angle BAD = 90° - 45° = 45°$, т. е. $AD = BD = 12$, т. е. $A(-12;\ 0)$.

Теперь находим AE: $AE = \sqrt{(8+12)^2+(6-0)^2} = \sqrt{400+36} = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}$.

9. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание KP совпало с осью Ox, а ось Oy прошла через вершину D перпендикулярно KP. Пусть O — начало координат. В ΔKOD, где $\angle K = 45°$, $KD = 4\sqrt{2}$, $\angle KOD = 90°$, находим: $KD^2 = KO^2 + OD^2$. Так как $\angle KDO = 90° - 45° = 45°$, то $DO = KO$, т. е. $2 \cdot KO^2 = KD^2$, откуда $KO = DO = \dfrac{KD}{\sqrt{2}} = 4$.

Значит, $D(0;\ 4)$, $K(-4;\ 0)$, $P(5;\ 0)$ (так как $OP = KP - KO = 5$).

По условию E — середина DP, тогда $x_E = \frac{1}{2}(x_D + x_P) = \frac{1}{2}(0 + 5) = 2{,}5$;

$y_E = \frac{1}{2}(4 + 0) = 2$, т. е. $E(2{,}5;\ 2)$.

Следовательно, $KE = \sqrt{(2{,}5+4)^2+(2-0)^2} = \sqrt{42{,}25+4} = \sqrt{46{,}25} = \sqrt{185/4} = \sqrt{185}/2$.

Ответ: $\sqrt{185}/2$.

К таблице 4

13. Уравнение окружности с центром в точке $O_1(0;\ y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Так как точки $M(-3;\ 0)$ и $N(0;\ 9)$ принадлежат окружности, то имеем: $9 + (0 - y_0)^2 = r^2$, или $9 + y_0^2 = r^2$ и $(0 - 0)^2 + (9 - y_0)^2 = r^2$, или $(9 - y_0)^2 = r^2$. Сравнивая левые части полученных равенств, получим $9 + y_0^2 = (9 - y_0)^2$, или $9 + y_0^2 = 81 - 18y_0 + y_0^2$, $18y_0 = 72$, $y_0 = 4$, тогда $r^2 = 9 + 4^2 = 25$. Значит, уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

14. Центр окружности расположен на оси Ox, значит $O_1(x_0;\ 0)$, тогда $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$. MN — диаметр окружности, тогда O_1 — середина MN, т. е. $x_0 = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{1}{2}(-2 + 4) = 1$.

Имеем: $(x - 1)^2 + y^2 = r^2$.

Точки $M(-2;\ 3)$ и $N(4;\ -3)$ принадлежат окружности, тогда получим: $(-2 - 1)^2 + 3^2 = r^2$, или $r^2 = 18$.

Значит, уравнение окружности запишется в виде $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

Ответ: $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

К таблице 5

3. Прямая $2x + y + 4 = 0$ пересекает оси координат в точках M и N. Так как точка M принадлежит оси Ox, то $y = 0$, тогда $2x + 0 + 4 = 0$; $x = -2$, т. е. $M(-2;\ 0)$. Аналогично, $x = 0$, тогда $2 \cdot 0 + y + 4 = 0$, $y = -4$, т. е. $N(0;\ -4)$.

В ΔMON $\angle MON = 90°$, $MO = 2$ и $NO = 4$, тогда $S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}MO \cdot ON = 4$.

Ответ: 4.

8. Найдем координаты точки M — середины отрезка AB:

$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(8 + (-8)) = 0$, $y_M = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6$.

Значит, $M(0;\ 6)$.

Уравнение медианы (прямой) CM имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки C и M принадлежат прямой CM, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой: $a \cdot (-2) + b \cdot (-8) + c = 0$, или $-2a - 8b + c = 0$ и $a \cdot 0 + b \cdot 6 + c = 0$, или $6b + c = 0$, откуда $b = -\frac{1}{6}c$, тогда

$-2a - 8 \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right) + c = 0$, т. е. $a = \frac{7}{6}c$.

Подставляя значения a и b в уравнение прямой, получим:

$\frac{7}{6}c \cdot x + \left(-\frac{1}{6}c\right) \cdot y + c = 0$, где $c \neq 0$, или $\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}y + 1 = 0$, т. е.

$7x - y + 6 = 0$ — уравнение медианы CM.

Ответ: $7x - y + 6 = 0$.

10. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox прошла через AC, а диагональ BD оказалась на оси Oy, где O — начало координат (точка пересечения диагоналей AC и BD).

Запишем координаты вершин ромба: $A(-10;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $C(10;\ 0)$, $D(0;\ -4)$.

Уравнение прямой AB имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки A и B принадлежат прямой AB, то

$$\begin{cases} a\cdot(-10)+b\cdot 0+c=0, \\ a\cdot 0+b\cdot 4+c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -10a+c=0, \\ 4b+c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=0{,}1c, \\ b=-0{,}25c. \end{cases}$$

Подставляя значения a и b в уравнение прямой, имеем:

$0{,}1c \cdot x + (-0{,}25c) \cdot y + c = 0$; $c \neq 0$, или $0{,}1x - 0{,}25y + 1 = 0$, или, умножив обе части полученного уравнения на 20, получим $2x - 5y + 20 = 0$.

Для прямой BC имеем: $\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 4+c=0, \\ a\cdot 10+b\cdot 0+c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4b+c=0, \\ 10a+c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} b=-\dfrac{1}{4}c, \\ a=-\dfrac{1}{10}c. \end{cases}$

Значит, уравнение BC примет вид $-\dfrac{1}{10}cx-\dfrac{1}{4}cy + c = 0$, $c \neq 0$, или $2x + 5y - 20 = 0$.

Аналогично для прямых DC и AD получим соответственно (решить самостоятельно): $2x - 5y - 20 = 0$ и $2x + 5y + 20 = 0$.

Замечание. Относительно осей Ox и Oy ромб может иметь и другое расположение, что равносильно замене оси Ox на Oy и, наоборот. Тогда придется заменить x на y и y на x.

Ответ: $2x - 5y + 20 = 0$, $2x - 5y - 20 = 0$, $2x + 5y - 20 = 0$, $2x + 5y + 20 = 0$.

К таблице 6

10. Предварительно докажем, что $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, где $\alpha = \angle AOB$. Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$ и $BO = OD$ (по свойству), тогда $S_{ABCD} = 2S_{\Delta AOB} + 2S_{\Delta BOC} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha + \dfrac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin(180^\circ-\alpha)\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot BO \cdot (AO\sin\alpha + OC\sin\alpha) = BO\sin\alpha \cdot (AO + OC) = BO \cdot AC \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha$, ч. т. д.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 20 \cdot \sin 60° = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}$.

Ответ: $80\sqrt{3}$.

14. Так как $MNKL$ — параллелограмм (по условию) и $\angle M = \angle K = 60°$ (по свойству), то ΔKEF — равносторонний. Кроме того, $NK = KL = 24$ и

$KE = \frac{1}{2}NK = 12$.

Значит, $S_{\Delta EKF} = \frac{1}{2}EK \cdot KF \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

17. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то диагональ BD делит его на два равных треугольника ($\Delta ABD = \Delta BDC$ — по III признаку). А равные многоугольники имеют равные площади (по свойству многоугольника).

Значит, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB = AD \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 4AD$.

Из ΔABD по теореме косинусов имеем
$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB$, или
$41 = AD^2 + 25 - 2 \cdot AD \cdot 5 \cdot \cos \angle ADB$.

$$\cos \angle ADB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ADB} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5},$$

где $\cos \angle ADB > 0$ ($\angle ADB$ — острый).

Следовательно, $41 = AD^2 + 25 - 10 \cdot AD \cdot \frac{3}{5}$, или $AD^2 - 6 \cdot AD - 16 = 0$, откуда находим $AD = 8$ или $AD = -2$ (не имеет смысла). Итак, $AD = 8$, тогда $S_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32$.

Ответ: 32.

К таблице 7

12. В ΔMKT $KM = KT = y$ (по условию), $\angle KMT = \angle KTM = 30°$ (как углы при основании равнобедренного треугольника), тогда $\angle K = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

По теореме синусов имеем: $\frac{MT}{\sin \angle MKT} = \frac{KM}{\sin \angle MTK}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sin 120°} = \frac{y}{\sin 30°}$.

Но $\sin 120° = \sin (180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 30° = \frac{1}{2}$, тогда

$$y = \frac{\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 120°} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Так как ME — биссектриса, то $\angle KME = \angle EMT = 15°$.

В ΔKME $\dfrac{x}{\sin 120^\circ}=\dfrac{y}{\sin\angle KEM}$, где $\angle KEM = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$,

тогда $x = \dfrac{y\cdot\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{6}{3\cdot 2} = 1.$

Итак, $ME = x = 1$, $KM = KT = y = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Если провести высоту KN на сторону MT, то $KM = y$ можно найти из соотношения $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: cos 30°, где KN — медиана ΔMKT.

Ответ: $x = 1$; $y = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

16. Проведем высоту BE к основанию AD. Заметим, что $\angle BAD = 60^\circ$ (соответственные углы при параллельных прямых AB и CD равны).

$S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ = 8\cdot 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=48\sqrt{3}.$

С другой стороны, $S_{ABCD} = AD\cdot BE = 12\cdot BE = 48\sqrt{3}$, откуда $BE = 4\sqrt{3}$.

В ΔABE $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AE = \dfrac{1}{2}AB = 4$. Значит, $ED = AD - AE = 8$. Из ΔBED, где $BD = y$, имеем:

$y^2 = BE^2 + ED^2$, $y = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+8^2}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$.

По свойству параллелограмма $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + DC^2)$, или $x^2 + y^2 = 2\cdot(12^2 + 8^2)$, $x^2 = 416 - 112$, $x = \sqrt{304}=4\sqrt{19}$.

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

Ответ: $x = 4\sqrt{19}$, $y = 4\sqrt{7}$.

К таблице 8

4. $RO = x$ — радиус описанной окружности. $S_{\Delta REF} = \dfrac{abc}{4x}$, где a, b, c — стороны треугольника. $S_{\Delta REF} = \dfrac{10\cdot 5\cdot 7}{4\cdot x}=\dfrac{175}{4x}$; с другой стороны, по формуле Герона $S_{\Delta REF} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{1}{2}(10 + 5 + 7) = 11$,

$S_{\Delta REF} = \sqrt{11\cdot 1\cdot 6\cdot 4}=2\sqrt{66}$, значит, $\dfrac{175}{2x}=2\sqrt{66}$, откуда $x = \dfrac{175}{4\sqrt{66}}$.

Ответ: $\dfrac{175}{4\sqrt{66}}$.

12. *Указание.* Применить теорему косинусов.

Далее решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1764, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$

Ответ: $x = 18$, $y = 48$.

14. *Указание.* Дважды применить теорему косинусов для ΔABC и ΔABD для угла A.

Ответ: $x = 13$.

15. Так как $ME \parallel FT$, то $\Delta KFT \sim \Delta KME$ (по двум углам), тогда $\dfrac{FK}{FT}=\dfrac{KM}{ME}$, или $\dfrac{50-y}{x}=\dfrac{50}{60}$; $\dfrac{50-y}{x}=\dfrac{5}{6}$. Из ΔMFE по теореме Пифагора $FE^2 = 60^2 - y^2$, а из ΔKFE $FE^2 = 50^2 - (50 - y)^2$.

Сравнивая полученные равенства, имеем $60^2 - y^2 = 50^2 - (50 - y)^2$, откуда находим $y = 36$. Поскольку $\dfrac{50-y}{x}=\dfrac{5}{6}$ и $y = 36$, то $\dfrac{14}{x}=\dfrac{5}{6}$, откуда $x = \dfrac{84}{5} = 16{,}8$.

Ответ: $x = 16{,}8$; $y = 36$.

19. Пусть $MK = a$, $NP = b$. Из ΔMPR $MP = \sqrt{40^2-24^2} = 32$.

Пусть $\angle PMR = \alpha$. Заметим, что $\Delta MKN \sim \Delta NPR$ ($\angle K = \angle P = 90°$ и $\angle KNM = \angle PNR$ как вертикальные), тогда $\cos\alpha = \dfrac{32}{40}=\dfrac{4}{5}$. Из ΔMNR по теореме косинусов $y^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot x \cdot 40 \cdot \dfrac{4}{5}$, или $y^2 = x^2 - 64x + 1600$.

Пусть $\angle KMN = \angle NRP = \beta$, тогда $\cos\beta = \dfrac{a}{x}=\dfrac{24}{y}$, откуда $a = \dfrac{24x}{y}$.

Из ΔMKN $a^2 = x^2 - 49$, значит, $\left(\dfrac{24x}{y}\right)^2 = x^2-49$, или $\dfrac{576x^2}{y^2}=x^2-49$.

Подставляя значение y^2, имеем $(x^2 - 64x + 1600)(x^2 - 49) = 576x^2$.

Упрощая полученное уравнение, получим
$x^4 - 64x^3 + 975x^2 + 3136x - 78\,400 = 0$.

Можно проверить, что $x = 25$ — корень уравнения, тогда $x^3(x - 25) - 39x^2(x - 25) + 3136(x - 25) = 0$, или $(x - 25)(x^3 - 39x^2 + 3136) = 0$, откуда $x_1 = 25$, тогда $y^2 = 25^2 - 64 \cdot 25 + 1600$, $y^2 = 25^2$, $y = 25$.

Итак, $x = 25$, $y = 25$ одно из решений задачи. Остается решить уравнение $x^3 - 39x^2 + 3136 = 0$. Можно убедиться, что оно не имеет целых корней. Запишем его в виде $x^2(39 - x) = 3136$, или $39 - x = \left(\dfrac{56}{x}\right)^2$.

Графическое решение показывает, что полученное уравнение имеет еще три корня, из которых один отрицательный, что не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

Два других корня можно вычислить приближенно: $x_2 \approx 10{,}5$, $x_3 \approx 36{,}7$, тогда $y_2^2 = 10{,}5^2 - 64 \cdot 10{,}5 + 1600$, откуда находим $y_2 \approx 32{,}2$.

Аналогично $y_3^2 = 36{,}7^2 - 64 \cdot 36{,}7 + 1600$, $y_3 \approx 24{,}5$. Как видим, задача оказалась довольно сложной.

Ответ: $x_1 = 25$, $y_1 = 25$; $x_2 \approx 10{,}5$, $y_2 \approx 32{,}2$; $x_3 \approx 36{,}7$, $y_3 \approx 24{,}5$.

22. Из ΔABC ($\angle C = 90°$) $x^2 - y^2 = 324$. Пусть $CK = a$, $KB = b$, тогда $a + b = 18$. Так как MK (а значит, и AK) — биссектриса $\angle CMB$, то $\frac{a}{b} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$, откуда $a = \frac{5}{7}b$. Так как $a + b = 18$, то $\frac{5}{7}b + b = 18$, $\frac{12}{7}b = 18$, откуда $b = \frac{21}{2}$, тогда $a = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{2} = \frac{15}{2}$.

Пусть $\angle CAK = \angle KAB = \alpha$. Из ΔABC $\cos 2\alpha = \frac{y}{x}$, а из ΔACK $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{y} = \frac{15}{2y}$.

Известно, что $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, следовательно, $\frac{1 - \left(\frac{15}{2y}\right)^2}{1 + \left(\frac{15}{2y}\right)^2} = \frac{y}{x}$,

или $\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} = \frac{y}{x}$, или $\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$.

Но $x^2 - y^2 = 324$, $x^2 = y^2 + 324$, тогда получим $\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{y^2 + 324}$.

Пусть $y^2 = t$, где $t > 0$, тогда уравнение примет вид $\left(\frac{4t - 225}{4t + 225}\right)^2 = \frac{t}{t + 324}$, или $(4t - 225)^2(t + 324) = t(4t + 225)^2$. После преобразований получим уравнение $1584t^2 - 583\,200t + 16\,402\,500 = 0$, или $44t^2 - 16\,200t + {}$ $+ 455\,625 = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{1350}{4}$, $t_2 = \frac{1350}{44}$.

1) Если $t = \frac{1350}{4}$, то $y^2 = \frac{1350}{4}$, $y = \frac{15\sqrt{6}}{2}$, тогда $x^2 = y^2 + 324 = \frac{2646}{4}$, $x = \frac{21\sqrt{6}}{2}$. Оба значения подходят, так как $y < x$ (по смыслу задачи).

2) Если $t = \dfrac{1350}{44}$, то $y^2 = \dfrac{1350}{44}$, $y = \dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{6}{11}} = \dfrac{15\sqrt{66}}{22}$, тогда

$x^2 = \dfrac{675}{22} + 324 = \dfrac{15\ 606}{44}$, откуда $x = \dfrac{51}{2}\sqrt{\dfrac{6}{11}} = \dfrac{51\sqrt{66}}{22}$, где условие $y < x$ также выполняется.

Ответ: 1) $x = \dfrac{21\sqrt{6}}{2}$, $y = \dfrac{15\sqrt{6}}{2}$; 2) $x = \dfrac{51\sqrt{66}}{22}$, $y = \dfrac{15\sqrt{66}}{22}$.

24. По свойству параллелограмма $2 \cdot (AD^2 + AB^2) = AC^2 + BD^2$, где $AD = x$, $AB = y$, $AD = BD = x$, тогда $2(x^2 + y^2) = AC^2 + x^2$, откуда $x^2 + 2y^2 = AC^2$.

По условию $AC - BD = 2$, или $AC = x + 2$, тогда $x^2 + 2y^2 = (x + 2)^2$, откуда $y^2 = 2x + 2$. Кроме того, $x - y = 11$. Следовательно, получим систему уравнений: $\begin{cases} y^2 = 2x + 2, \\ x - y = 11; \end{cases}$ $\begin{cases} (x - 11)^2 = 2x + 2, \\ y = x - 11. \end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем $x^2 - 22x + 121 - 2x - 2 = 0$, или $x^2 - 24x + 119 = 0$, откуда $x_1 = 17$, $x_2 = 7$, тогда $y_1 = 6$, $y_2 = 7 - 11 = -4$ (не имеет смысла). Поскольку $x - y = 11$, т. е. $x > y$, то $x = 17$, $y = 6$.

Ответ: $x = 17$, $y = 6$.

К таблице 9

8. $\cos \angle C = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{CA}\{-4 - 4; 8 - 0) = \{-8; 8\}$, $\overrightarrow{CB}\{2 - 4; 14 - 0\} = \{-2; 14\}$, тогда

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= -8 \cdot (-2) + 8 \cdot 14 = -16 + 112 = 96.$

Следовательно, $\cos \angle C = \dfrac{96}{8\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \dfrac{12}{2 \cdot 10} = 0{,}6.$

Ответ: 0,6.

16. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha = \angle CAB$. По условию $A(2; 4)$, $B(2; 8)$, $C(6; 4)$, тогда $\overrightarrow{AB}\{2 - 2; 8 - 4\} = \{0; 4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6 - 2; 4 - 4\} = \{4; 0\}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 0$, $\cos\alpha =$

$= \dfrac{0}{4 \cdot 4} = 0$, т. е. $\angle CAB = 90°$.

Ответ: 90°.

20. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{LT}$: $\overrightarrow{MN}\{6-1;\ 2-5\} = \{5;\ -3\}$, $\overrightarrow{LT}\{3-4{,}5;\ 3-5{,}5\} = \{-1{,}5;\ -2{,}5\}$. Тогда $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{LT} = 5\cdot(-1{,}5) + (-3)\cdot(-2{,}5) = -7{,}5 + 7{,}5 = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{LT}$, т. е. $\angle LON = 90°$.

Ответ: 90°.

К таблице 10

5. По условию $C = 8\pi\sqrt{3}$. Но $C = 2\pi R$, тогда $2\pi R = 8\pi\sqrt{3}$, $R = 4\sqrt{3}$.

Так как $\smile AmB = 120°$, то $\angle AOB = 120°$, где $AO = OB = R = 4\sqrt{3}$.

Из центра O окружности опустим перпендикуляр OC на хорду AB. OC — медиана равнобедренного ΔAOB, где $\angle OAB = \angle OBA = 30°$.

Из ΔAOC $AC = AO\cdot\cos 30° = 4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$. Значит, $AB = 2\cdot AC = 12$.

Ответ: 12.

9. Так как $\smile TmM = 120°$, то $\angle TOM = 120°$. В равнобедренном ΔTOM $(TO = MO = R)$; $\angle OTM = \angle OMT = 30°$.

Проведем высоту OK, тогда из ΔOTK, где $TK = 5$, $OT = \dfrac{5}{\cos 30°} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$,

следовательно, $l = \dfrac{\pi R}{180}\cdot\alpha = \dfrac{\pi\cdot 10}{180\cdot\sqrt{3}}\cdot 120 = \dfrac{20\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\dfrac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

15. *I способ.*
$\smile AM = \smile BN$ — как дуги окружности, заключенные между параллельными хордами AB и MN ($AB \parallel MN$ — по условию).
Но тогда $AM = BN$, т. е. $ABNM$ — равнобедренная трапеции.
Проведем диагональ AN. Так как $MN = 16$, $AB = 12$, то

$MK = \dfrac{1}{2}(16 - 12) = 2$.

Из ΔAMK $AM = \sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}$. $KN = MN - MK = 14$.

Из ΔAKN, где $AK = KN = 14$, $AN = 14\sqrt{2}$.

Известно, что $S_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности. Но $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot 14 = \dfrac{10\sqrt{2}\cdot 16\cdot 14\sqrt{2}}{4R}$, откуда $R = 10$.

Тогда $C = 2\pi R = 20\pi$.

II способ.

Соединим точки B и N с центром окружности, тогда $OB = ON = R$. Проведем диаметр EF, перпендикулярный данным хордам. Пусть L и T соответственно точки пересечения хорд AB и MN с диаметром EF, тогда $LT = AK = 14$, $LB = \frac{1}{2}AB = 6$ и $TN = \frac{1}{2}MN = 8$. Пусть $OT = x$, тогда $OL = 14 - x$. Из ΔOLB и ΔOTN имеем: $\begin{cases} 6^2 + (14 - x)^2 = R^2, \\ 8^2 + x^2 = R^2. \end{cases}$

Сравнивая левые части системы, получим: $36 + 196 - 28x + x^2 = 64 + x^2$, $28x = 168$, откуда $x = 6$. Значит, $R^2 = 64 + 36 = 100$, $R = 10$ и $C = 2\pi R = 20\pi$.

III способ.

Пусть $EL = x$, $TF = y$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} TN^2 = ET \cdot TF, \\ BL^2 = EL \cdot LF; \end{cases} \quad \begin{cases} y(14 + x) = 64, \\ x(14 + y) = 36. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, получим $14(y - x) = 28$, $y - x = 2$, $y = x + 2$. Подставим значение y в одно из уравнений системы $(x + 2)(14 + x) = 64$, или $x^2 + 16x - 36 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -18$ (не имеем смысла). Если $x = 2$, то $y = 4$, тогда $EF = 2R = x + y + LT = 20$, откуда $R = 10$, значит, $C = 2\pi R = 20\pi$.

Ответ: 20π.

22. *I способ.*

По условию $AM = BM = 14$, т. е. ΔAMB — равнобедренный. Проведем высоту ME, тогда ME — медиана ΔMAB; $AE = BE = 4$.

$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ME = 4ME$. Из ΔAME $ME^2 = AM^2 - AE^2$, $ME = \sqrt{14^2 - 4^2} = 6\sqrt{5}$. $S_{\Delta AMB} = 24\sqrt{5}$.

С другой стороны, $S_{\Delta AMB} = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны ΔAMB, R — радиус описанной окружности.

Значит, $\frac{14 \cdot 14 \cdot 8}{4R} = 24\sqrt{5}$, откуда $R = \frac{49}{3\sqrt{5}}$, тогда

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{49}{3\sqrt{5}} = \frac{98\pi\sqrt{5}}{15}.$$

II способ.

Соединим точку A с центром O окружности. $ME = 6\sqrt{5}$ (см. I способ), $AO = MO = R$. Из ΔAOE $AO^2 - OE^2 = AE^2$, или $R^2 - (6\sqrt{5} - R)^2 = 16$, откуда находим $R = \frac{49}{3\sqrt{5}}$, и т. д. (см. I способ).

К таблице 11

8. Проведем высоту NK. Пусть $EK = x$. Так как $\angle E = 45°$, то $\angle ENK = 45°$, т. е. $NK = EK = x$. Пусть $MN = y$, тогда $EF = 2x + y = 24$. По условию $EN = FM$, тогда по свойству описанного четырехугольника, имеем: $2EN = EF + NM = 2x + 2y$, или $EN = x + y$. Из ΔENK $EN^2 = EK^2 + NK^2$, или $(x + y)^2 = 2x^2$, $x + y = x\sqrt{2}$. Так как $2x + y = 24$, то $y = 24 - 2x$, значит, $x + 24 - 2x = x\sqrt{2}$, $x(\sqrt{2}+1)=24$, откуда $x=\dfrac{24}{\sqrt{2}+1}=24(\sqrt{2}-1)$.

Но $x = 2r$, тогда $r=12(\sqrt{2}-1)$.

Следовательно, $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 144\pi(3-2\sqrt{2})$.

Ответ: $144\pi(3-2\sqrt{2})$.

10. Проведем диаметр окружности $AB \perp MN$ и $AB \perp TK$, проходящий через центр O окружности. По условию $TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$ и $EF = 8$ — расстояние между точками касания ее боковых сторон.

Пусть $EM = MA = m$, $TE = TB = b$, $EO = r$ — радиус вписанной окружности; $AB = 2r$, $EC = \dfrac{1}{2}EF = 4$, где C — точка пересечения EF и AB.

Из ΔEOC $OC = \sqrt{r^2-16}$, тогда $AC = AO - OC = r-\sqrt{r^2-16}$, $BC = BO + OC = r+\sqrt{r^2-16}$; следовательно, $ME : ET = AC : BC$, или $m : n = (r-\sqrt{r^2-16}):(r+\sqrt{r^2-16})$. Из ΔMOT, где $\angle MOT = 90°$ (MO и TO — биссектрисы углов TMN и MTK, где $\angle TMN + \angle MTK = 180°$), имеем: $OE^2 = ME \cdot ET$, или $mn = r^2$.

По условию $S_{TMNK} = 125$, или $\dfrac{1}{2}(MN + TK)\cdot AB = 125$.

Но $2MT = MN + TK$ (по свойству описанного четырехугольника), тогда $2(m + n) = MN + TK$, или $(m + n)\cdot 2r = 125$. Имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} m:n=(r-\sqrt{r^2-16}):(r+\sqrt{r^2-16}),\\ mn=r^2,\\ 2(m+n)r=125. \end{cases}$$

Пусть для краткости $r-\sqrt{r^2-16}=\alpha$, $r+\sqrt{r^2-16}=\beta$, тогда $m=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot n$ и II уравнение системы примет вид $\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot n^2=r^2$, следовательно, III уравнение преобразуется к виду $2\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot n+n\right)\cdot r=125$, или $2nr\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+1\right)=125$.

Но $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\cdot n = r,\ \ n = \dfrac{r}{\sqrt{\alpha/\beta}}$, значит, $2r^2\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+1\right) = 125\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

Преобразуем выражения $\dfrac{\alpha}{\beta}+1$ и $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

$$\frac{\alpha}{\beta}+1 = \frac{r-\sqrt{r^2-16}}{r+\sqrt{r^2-16}}+1 = \frac{2r}{r+\sqrt{r^2-16}};\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{r^2-r^2+16}}{r+\sqrt{r^2-16}} =$$

$$= \frac{4}{r+\sqrt{r^2-16}}.$$

Следовательно, $2r^2\cdot\dfrac{2r}{r+\sqrt{r^2-16}} = 125\cdot\dfrac{4}{r+\sqrt{r^2-16}}$, или $r^3 = 125$, $r = 5$.

Тогда $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π.

19. Соединим точку M с центром окружности, тогда $MO = NO = KO = R$ — радиус описанной окружности. Пусть $OT = x$. По условию ΔMKN — равнобедренный, где высота KT — медиана и биссектриса.

Тогда $MT = 7$, $KT = 24$ (по условию).

Из ΔMKT $MK = \sqrt{24^2+7^2} = \sqrt{625} = 25$. Заметим, что $KT = R + x = 24$, а из ΔMOT $R^2 - x^2 = 49$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} R+x=24,\\ R^2-x^2=49;\end{cases}\quad \begin{cases} R+x=24,\\ (R-x)(R+x)=49;\end{cases}\quad \begin{cases} R+x=24,\\ 24(R-x)=49;\end{cases}\quad \begin{cases} R+x=24,\\ R-x=\dfrac{49}{24}.\end{cases}$$

Складывая почленно уравнения полученной системы, имеем:

$2R = 24 + \dfrac{49}{24}$; $2R = \dfrac{625}{24}$, $R = \dfrac{625}{48}$.

Следовательно, $S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \pi\left(\dfrac{625}{48}\right)^2$.

Ответ: $\pi\left(\dfrac{625}{48}\right)^2$.

К таблице 12

1. ΔAOB — равносторонний (по условию), где $OA = 12$, тогда

$S_{\Delta} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (площадь правильного треугольника со стороной a).

$S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha$, где $R = OA = 12$, $\alpha = 60°$.

Следовательно, $S_{ф.} = S_{сект.} - S_{\Delta AOB} = \dfrac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 60 - \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \dfrac{\pi \cdot 12^2}{6} - \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\pi - 36\sqrt{3} = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Ответ: $12(2\pi - 3\sqrt{3})$.

6. $S_{ф.} = S_{кр.} - S_{кв.} = \pi \cdot OA^2 - S_{кв.}$, $R = OA = 10$, $a = R\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата, R — радиус описанной окружности, тогда $S_{кв.} = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 200$, значит, $S_{кр.} = \pi \cdot 100 - 200 = 100(\pi - 2)$.

Ответ: $100(\pi - 2)$.

10. Пусть $a = 15$ — сторона правильного треугольника, тогда

$S_{ф.} = \dfrac{\pi a^2}{3} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, или $S_{ф.} = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{3} - \dfrac{15^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) =$

$= 37{,}5 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3}) = 75(\pi - 1{,}5\sqrt{3})$.

Ответ: $75(\pi - 1{,}5\sqrt{3})$.

12. $S_{ф.} = S_{MNKT} - \dfrac{1}{4}S_{кр.}$.

$S_{MNKT} = a^2 = 12^2 = 144$; $S_{кр.} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$, тогда $\dfrac{1}{4}S_{кр.} = \dfrac{1}{4} \cdot 144\pi = 36\pi$. Значит, $S_{ф.} = 144 - 36\pi = 36(4 - \pi)$.

Ответ: $36(4 - \pi)$.

ОТВЕТЫ

7 класс

Таблица 1

1. $\angle ac = 77°30'$; $\angle cb = 102°30'$. **2.** $\angle mk = 160°$; $\angle kn = 20°$. **3.** $\angle ADC = 80°$; $\angle CDB = 100°$. **4.** $\angle MPK = 130°$; $\angle KPN = 50°$. **5.** $\angle PLR = 100°$; $\angle RLS = 80°$. **6.** 160°. **7.** 150°. **8.** 90°. **9.** 160°. **10.** 105°. **11.** 135°. **12.** $\angle AMN = \angle BMN = 90°$.

Таблица 2

1. $\angle a_1b_1 = 120°$; $\angle ab_1 = 60°$. **2.** 145°; 145°. **3.** 120°. **4.** $\angle 3 = 150°$; $\angle 4 = 30°$. **5.** $\angle 1 = \angle 3 = 60°$; $\angle 2 = \angle 4 = 120°$. **6.** 60°. **7.** $\angle 1 = 120°$; $\angle 2 = \angle 3 = 60°$. **8.** 135°. **9.** $\angle 2 = 50°$; $\angle 3 = 40°$; $\angle 4 = 140°$. **10.** $\angle 2 = \angle 3 = 55°$; $\angle 4 = 35°$. **11.** $\angle 1 = 110°$; $\angle 2 = \angle 3 = 35°$. **12.** 180°. **13.** 110°.

Таблица 4

1. $AC = BC = 8$; $AB = 4$. **2.** $MK = KN = 12$; $MN = 2$. **3.** 0,6; 0,6. **4.** $QR = RE = 2{,}8$; $QE = 0{,}8$. **5.** $EF = 15$; $EM = MF = 10$. **6.** 0,8. **7.** 4,9. **8.** 50. **9.** 10. **10.** $RT = TS = 12$, $RS = 21$. **11.** 10; 10. **12.** 6; 6. **13.** 9. **14.** 15.

Таблица 5

1. 75°. **2.** 140°. **3.** 30°. **4.** 135°. **5.** 50°. **6.** 120°. **7.** 90°. **8.** 40°. **9.** 60°. **10.** 30°. **11.** 40°. **12.** 20°. **13.** 60°. **14.** 60°. **15.** 60°. **16.** 110°. **17.** 80°. **18.** 50°.

Таблица 7

1. $\angle 1 = 106°$; $\angle 2 = 74°$. **2.** $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = 72°$. **3.** $\angle 1 = 130°$; $\angle 2 = 50°$. **4.** $\angle 1 = 100°$; $\angle 2 = 80°$. **5.** $\angle 1 = 67°\,30'$; $\angle 2 = 112°\,30'$. **6.** $\angle N = 60°$; $\angle M = 30°$. **7.** $\angle A = 60°$; $\angle ABC = 30°$. **8.** 43°. **9.** 68°. **10.** 65°. **11.** 30°; 30°. **12.** 74°. **13.** 55°.

Таблица 8

1. $\angle R = 45°$; $\angle P = 105°$; $\angle Q = 30°$. **2.** $\angle M = 80°$; $\angle N = 60°$; $\angle K = 40°$. **3.** $\angle P = \angle R = 67°30'$; $\angle S = 45°$. **4.** $\angle Q = \angle M = 40°$; $\angle L = 100°$. **5.** $\angle A = 40°$; $\angle C = 100°$. **6.** $\angle M = 60°$; $\angle Q = 80°$; $\angle QPM = 40°$. **7.** $\angle S = 70°$; $\angle STR = 40°$. **8.** $\angle BAC = \angle B = 72°$; $\angle C = 36°$. **9.** $\angle M = 75°$; $\angle MNP = 70°$; $\angle P = 35°$. **10.** $\angle P = 25°$; $\angle TSP = 40°$.

Таблица 9

1. 120°. **2.** 80°. **3.** $\angle T = 90°$; $\angle S = 60°$. **4.** $\angle B = 70°$; $\angle C = 40°$. **5.** 60°; 60°; 60°. **6.** $\angle E = 90°$; $\angle P = 30°$. **7.** 40°; 40°. **8.** $\angle A = 50°$; $\angle C = 70°$. **9.** $\angle M = \angle K = 50°$; $\angle N = 80°$. **10.** $\angle D = 60°$; $\angle E = 40°$. **11.** $\angle A = 30°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 90°$. **12.** $\angle A = \angle B = 45°$; $\angle D = 90°$. **13.** 60°; 60°. **14.** $\angle S = \angle P = 65°$; $\angle SKP = 50°$. **15.** $\angle P = \angle R = 45°$; $\angle PQR = 90°$. **16.** $\angle D = \angle F = 45°$; $\angle DEF = 90°$. **17.** $\angle BAC = 60°$; $\angle ABC = 30°$; $\angle C = 90°$. **18.** $\angle L = 65°$; $\angle MKN = \angle KNL = 45°$; $\angle NKL = 70°$. **19.** $\angle COB = \angle AOD = 90°$; $\angle B = 65°$; $\angle D = 25°$. **20.** $\angle QOC = \angle MOR = 55°$; $\angle M = 45°$; $\angle R = 80°$. **21.** $\angle KMN = 70°$; $\angle KML = \angle LMN = 35°$; $\angle MLK = 105°$; $\angle MLN = 75°$. **22.** $\angle PMA = 50°$; $\angle APM = 60°$; $\angle A = 70°$. **23.** $\angle MSL = 70°$; $\angle L = 40°$. **24.** $\angle MPL = \angle MLP = 60°$; $\angle PNL = \angle MNL = 90°$; $\angle PKM = \angle PKL = 90°$. **25.** $\angle C = 90°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 40°$. **26.** $\angle P = 40°$; $\angle PTS = 60°$. **27.** $\angle T = 40°$; $\angle MRK = 10°$; $\angle KPT = 50°$; $\angle RKT = 90°$. **28.** $\angle ABD = 70°$; $\angle D = 30°$; $\angle ABC = 40°$; $\angle CBD = 30°$; $\angle BCD = 120°$. **29.** $\angle P = 30°$; $\angle KMP = 50°$; $\angle NMP = 30°$; $\angle MNP = 120°$. **30.** $\angle MSN = 120°$; $\angle MSK = 35°$; $\angle PSN = 25°$; $\angle MKS = 110°$; $\angle SPN = 130°$; $\angle SKP = 70°$; $\angle SPK = 50°$; $\angle KSP = 60°$. **31.** 165°. **32.** 125°.

Таблица 10

1. $AB = 8$; $BC = 4$. **2.** 15. **3.** $MP = 27$; $PN = 9$. **4.** 54. **5.** 18. **6.** 26. **7.** 110°. **8.** 15°. **9.** $AB = 24$; $BC = 12$. **10.** 9,75. **11.** 14. **12.** $\angle A = \angle B = 30°$; $\angle ACB = 120°$. **13.** $\angle T = 50°$; $\angle TPS = \angle TSP = 65°$. **14.** 115°. **15.** $\angle KNM = 90°$; $\angle NKM = 36°$; $\angle KNM = 54°$. **16.** $CB = 27$; $CD = 9$. **17.** $SQ = 15{,}6$; $\angle RQT = 150°$. **18.** 6. **19.** 44. **20.** 45°. **21.** 70°.

Таблица 12

1. 13. **2.** 15. **3.** 10. **4.** 6. **5.** 4. **6.** 7,5. **7.** 6. **8.** 5. **9.** 14. **10.** 7. **11.** 8. **12.** 10. **13.** 13. **14.** 13. **15.** 7. **16.** 4.

8 класс

Таблица 2

1. 20. **2.** 10. **3.** 14. **4.** 16. **5.** 22. **6.** 28. **7.** 22. **8.** 24. **9.** 22. **10.** 32. **11.** 40. **12.** 52. **13.** 60. **14.** 32. **15.** 48. **16.** 48. **17.** 64. **18.** 16. **19.** 20. **20.** 112. **21.** 72. **22.** 28. **23.** 60. **24.** 36.

Таблица 3

1. $\angle M = \angle P = 70°$; $\angle MNP = \angle MKP = 110°$. **2.** $\angle A = \angle C = 70°$; $\angle B = \angle ADC = 110°$. **3.** $\angle L = \angle S = \angle K = \angle R = 90°$. **4.** $\angle M = \angle E = \angle MFE =$

$= \angle MDE = 90°$. **5.** $\angle P = \angle M = 60°$; $\angle PNM = \angle PLM = 120°$. **6.** $\angle E = \angle M = 120°$; $\angle EFM = \angle EKM = 60°$. **7.** $\angle D = \angle B = \angle DAB = \angle BCD = 90°$. **8.** $\angle P = \angle N = 65°$; $\angle PMN = \angle PKN = 115°$. **9.** $\angle KFE = \angle KNE = \angle FKN = \angle FEN = 90°$. **10.** $\angle S = \angle L = 70°$; $\angle SPL = \angle SML = 110°$. **11.** $\angle LKN = \angle LMN = \angle KLM = \angle KNM = 90°$. **12.** $\angle B = \angle D = \angle DAB = \angle DCB = 90°$. **13.** $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle DAB = 90°$. **14.** $\angle M = 60°$; $\angle MKL = \angle MSL = 120°$. **15.** $\angle MRK = \angle RKL = \angle MLK = \angle LMR = 90°$. **16.** $\angle N = \angle T = 70°$; $\angle S = \angle NPT = 110°$. **17.** $\angle PLK = \angle PTK = 80°$; $\angle TPL = \angle TKL = 100°$. **18.** $\angle A = \angle C = 60°$; $\angle ABC = \angle D = 120°$.

Таблица 4

1. $\angle M = \angle R = 70°$; $\angle P = \angle N = 110°$. **2.** $\angle A = \angle C = 60°$; $\angle B = \angle D = 120°$. **3.** $\angle R = \angle L = 60°$; $\angle S = \angle M = 120°$. **4.** $\angle M = \angle R = \angle K = \angle N = 90°$. **5.** $\angle TPK = \angle PKS = \angle KST = \angle STK = 90°$. **6.** $\angle DAB = \angle DCB = 60°$; $\angle ADC = \angle ABC = 120°$. **7.** $\angle RMK = \angle MKL = \angle KLR = \angle MRL = 90°$. **8.** $\angle FSM = \angle FTM = 80°$; $\angle SFT = \angle SMT = 100°$. **9.** $\angle DAB = \angle DCB = 36°$; $\angle ADC = \angle ABC = 144°$.

Таблица 5

1. Квадрат со стороной 9. **2.** Ромб со стороной 9. **3.** 8,5; 8,5; 9,5; 9,5. **4.** 7,2; 7,2; 10,8; 10,8. **5.** Квадрат со стороной 9. **6.** 6; 6; 12; 12. **7.** 6; 6; 12; 12. **8.** 6,75; 6,75; 11,25; 11,25. **9.** 8; 8; 10; 10. **10.** 8; 8; 10; 10. **11.** 4; 4; 14; 14. **12.** 8; 8; 10; 10.

Таблица 6

1. $\angle B = 110°$; $\angle C = 130°$. **2.** $\angle E = \angle N = 80°$; $\angle M = 100°$. **3.** $\angle P = 105°$; $\angle S = 80°$. **4.** $\angle E = \angle F = 90°$; $\angle M = 115°$. **5.** $\angle K = \angle KLM = 120°$; $\angle M = \angle KNM = 60°$. **6.** $\angle RFK = \angle K = 55°$; $\angle R = \angle RMK = 125°$. **7.** $\angle BAD = 60°$; $\angle B = \angle BCD = 120°$. **8.** $\angle SMK = 90°$; $\angle K = 65°$; $\angle SRK = 115°$. **9.** $\angle PTO = 90°$; $\angle O = 55°$; $\angle PLO = 125°$. **10.** $\angle ENM = \angle FMN = 60°$; $\angle NEF = \angle MFE = 120°$. **11.** $\angle TKF = 90°$; $\angle TMF = 120°$. **12.** $\angle KRT = 90°$; $\angle KFT = 135°$. **13.** $\angle ABC = 105°$; $\angle C = 125°$; $\angle D = 55°$. **14.** $\angle M = 70°$; $\angle T = 50°$; $\angle MLS = 110°$; $\angle LST = 130°$. **15.** $\angle T = \angle TRF = 70°$; $\angle TEF = \angle F = 120°$. **16.** $\angle NOE = 65°$; $\angle ONM = 115°$; $\angle OEM = 75°$; $\angle NME = 105°$. **17.** $\angle MSK = 65$; $\angle SMN = 115$; $\angle MNK = 100°$; $\angle SKN = 80°$. **18.** $\angle NAB = 110$; $\angle ANM = 70$; $\angle ABM = 100°$; $\angle NMB = 80°$.

Таблица 7

1. 44. **2.** 84. **3.** 132. **4.** 20. **5.** 34. **6.** 84. **7.** 62. **8.** 68,8. **9.** 50. **10.** 36.

Таблица 8

1. 18. **2.** 49. **3.** 60. **4.** 108. **5.** 36. **6.** 72. **7.** 100. **8.** 33. **9.** 40. **10.** $75\sqrt{3}$. **11.** $48\sqrt{3}$. **12.** 64. **13.** 126. **14.** 108. **15.** 112.

Таблица 9

1. 32. **2.** 156. **3.** 32. **4.** 126. **5.** $162\sqrt{3}$. **6.** $60\sqrt{3}$. **7.** 72. **8.** 112,5. **9.** 864. **10.** 160. **11.** 40. **12.** 768. **13.** $84{,}5\sqrt{3}$. **14.** 480,5. **15.** 48. **16.** $373\frac{1}{3}$. **17.** 48. **18.** 140. **19.** 48. **20.** 262,5. **21.** 144. **22.** $48\sqrt{3}$. **23.** 200. **24.** 48.

Таблица 10

1. 165. **2.** 18. **3.** 60. **4.** 169. **5.** $16\sqrt{3}$. **6.** 80. **7.** 96. **8.** 84. **9.** 8. **10.** 18,5. **11.** $\sqrt{191}/4$. **12.** 270. **13.** $24\sqrt{5}$. **14.** 168. **15.** 196. **16.** 64. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** $288\sqrt{3}$. **19.** 36. **20.** 25. **21.** 84.

Таблица 11

1. 32. **2.** 240. **3.** 58,5. **4.** 264. **5.** 96. **6.** 214,5. **7.** 36. **8.** 47,5. **9.** 144. **10.** 176. **11.** 300. **12.** 108. **13.** 96. **14.** 294. **15.** 48. **16.** $58\sqrt{3}$. **17.** 292. **18.** 180. **19.** 784. **20.** 32. **21.** 216. **22.** 45. **23.** 204. **24.** 160. **25.** 70. **26.** 49. **27.** 64.

Таблица 12

1. 5. **2.** $\sqrt{153}$. **3.** $\sqrt{10}$. **4.** 3. **5.** 15. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** $16/\sqrt{3}$. **8.** 24. **9.** $12\sqrt{3}$. **10.** 60/13. **11.** 120/13. **12.** 13. **13.** 16. **14.** $14\sqrt{6}/5$. **15.** $4\sqrt{13}$. **16.** 128/17. **17.** $5\sqrt{3}$. **18.** $8\sqrt{2}$. **19.** $\sqrt{82}$. **20.** 10. **21.** $5\sqrt{3}$. **22.** 8. **23.** 8. **24.** $12\sqrt{3}$. **25.** 7,2. **26.** 10. **27.** $16\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **28.** 4. **29.** 13. **30.** 8. **31.** $\sqrt{937}$. **32.** 2. **33.** $\sqrt{17}$. **34.** 5. **35.** 6. **36.** 15. **37.** 10. **38.** 15. **39.** 20. **40.** 120/13. **41.** 29. **42.** 12/7. **43.** 9. **44.** 34. **45.** 15; 20. **46.** 7. **47.** 6. **48.** 22. **49.** 9. **50.** 10. **51.** 3. **52.** 26. **53.** $8\sqrt{3}$. **54.** 10.

Таблица 13

1. 24. **2.** $x = 8$; $y = 14$; $z = 12$. **3.** $x = 18$; $y = 15$. **4.** $x = 8$; $y = 12$; $z = 16$. **5.** $x = 20$; $y = 50$; $z = 40$. **6.** $x = 42$; $y = 28$; $z = 21$. **7.** $x = 27$; $y = 21$; $z = 24$. **8.** $x = 27$; $y = 21$; $z = 24$. **9.** 100. **10.** 5. **11.** $3\sqrt{3}$. **12.** $x = 72$; $y = 98$. **13.** 13,125. **14.** $x = 5$; $y = 7$. **15.** $x = 14$; $y = 21$. **16.** 48. **17.** $x = 40$; $y = 90$. **18.** $x = 39$; $y = 52$. **19.** 6. **20.** 60. **21.** 168. **22.** 72. **23.** 18. **24.** 48. **25.** 64. **26.** 92. **27.** 60.

28. 7,5. **29.** 10,8. **30.** $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 8\frac{4}{7}$. **31.** $5\frac{1}{3}$. **32.** $x = 54$; $y = 48$. **33.** 45.

34. $x = 9$; $y = 15$. **35.** $x = 15\frac{5}{11}$; $y = 18\frac{6}{11}$. **36.** 31,2.

Таблица 14

1. $x = 15$; $y = 8$. **2.** $x = 12$; $y = 14$. **3.** 20. **4.** 8,75. **5.** $5\frac{15}{17}$. **6.** $x = 12$; $y = 36$. **7.** $x = 18$; $y = 30$. **8.** $x = 12$; $y = 13$. **9.** 2,5. **10.** 25,6. **11.** $x = 4$; $y = 8$. **12.** 4. **13.** $x = 24$; $y = 40$. **14.** $x = 20$; $y = 16$. **15.** $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 4\frac{4}{7}$. **16.** $2\frac{1}{7}$. **17.** $37\frac{1}{3}$. **18.** $x = 8$; $y = 12$. **19.** $8\frac{4}{7}$. **20.** $x = 9{,}6$; $y = 22{,}4$. **21.** 16. **22.** $x = 12$; $y = 4$. **23.** $x = 4$; $y = 6$. **24.** 12. **25.** $x = 6\sqrt{3}$; $y = 12\sqrt{3}$. **26.** $x = 3{,}5$; $y = 3{,}75$. **27.** $x = 36$; $y = 12$. **28.** $x = 2{,}4$; $y = 7{,}2$.

Таблица 16

1. 27. **2.** 12. **3.** 48. **4.** 120. **5.** 62. **6.** $AK = 6$; $KC = 12$. **7.** $RS = 8$; $RF = 6$. **8.** 28. **9.** 18. **10.** $9\sqrt{3}/2$. **11.** $3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$. **12.** $EF = MN = 24$. **13.** 12. **14.** 0,5. **15.** $4(1 + 2\sqrt{2})$.**16.** $MR = 4{,}8$; $MS = 9{,}6$; $RS = 6{,}4$. **17.** $FE = 12{,}5$; $EC = 10$; $FC = 7{,}5$.

Таблица 17

1. $KN = 24$; $MT = 50/13$; $TN = 288/13$. **2.** $NL = 9$; $LM = 16$; $NK = 15$; $KM = 20$. **3.** $ME = 4{,}5$; $MK = 7{,}5$; $KN = 10$. **4.** $MT = 25/13$; $TN = 144/13$. **5.** $KN = 5\sqrt{21}$; $ME = 4$; $EN = 21$. **6.** $KN = 30$; $KM = 40$; $NF = 18$; $FM = 32$. **7.** $KM = 5\sqrt{61}$; $KN = 6\sqrt{61}$; $MN = 61$; $MT = 25$; $TN = 36$. **8.** $MN = 9$; $ME = EN = 4{,}5$; $EF = 0{,}5$; $FN = 4$. **9.** 90. **10.** 246. **11.** 144/13. **12.** $64\sqrt{3}$. **13.** 54/13. **14.** 156. **15.** 84,375.

Таблица 18

1. $9\sqrt{3}$. **2.** $16\sqrt{2}$. **3.** $4\sqrt{3}$. **4.** 15. **5.** 5. **6.** $15\sqrt{2}$. **7.** $9\sqrt{3}$. **8.** $6\sqrt{3}$. **9.** $12\sqrt{2}$. **10.** 12. **11.** $6\sqrt{3}$. **12.** $4(4 + \sqrt{3})$. **13.** $10(\sqrt{3} + 1)$. **14.** $10\sqrt{6}/3$. **15.** $6\sqrt{6}$. **16.** $5\sqrt{2}$.

Таблица 19

1. 36. **2.** $64\sqrt{3}$. **3.** $21\sqrt{3}$. **4.** $\frac{5}{2}(5\sqrt{3} + 6)$. **5.** 73,5. **6.** $KL = 7{,}5$; $\cos\angle K = 0{,}6$. **7.** $81\sqrt{3}/4$; $\cos\angle ACB = 0{,}5$. **8.** $\sin\angle F = 3/\sqrt{13}$; $\cos\angle F = 2/\sqrt{13}$; $\operatorname{tg}\angle F = 3/2$;

ctg $\angle F = 2/3$. **9.** 2/3. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$. **11.** $192\sqrt{6}$. **12.** $\sin\angle K = 3/\sqrt{10}$; $\cos\angle K = 1/\sqrt{10}$; $\mathrm{tg}\,\angle K = 3$; $\mathrm{ctg}\,\angle K = 1/3$. **13.** $\sin\angle B = 2\sqrt{6}/5$; $\cos\angle B = 1/5$; $\mathrm{tg}\,\angle B = 2/\sqrt{6}$; $\mathrm{ctg}\,\angle B = 1/2\sqrt{6}$. **14.** $\sin\alpha = 12/13$; $\cos\alpha = 5/13$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 12/5$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5/12$. **15.** $\sin\angle K = 0{,}8$; $\cos\angle K = 0{,}6$. **16.** $\sin\angle R = \sqrt{3}/2$; $\mathrm{tg}\,\angle R = \sqrt{3}$. **17.** $\cos\alpha = 0{,}4$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2/\sqrt{21}$. **18.** $\sin\angle A = \sqrt{2}/6$; $\mathrm{tg}\,\angle A = \sqrt{17}/17$. **19.** $\cos\angle B = 7/25$; $\mathrm{ctg}\,\angle B = 7/24$. **20.** $\sin\alpha \approx 0{,}46$; $\mathrm{tg}\,\alpha \approx 0{,}52$. **21.** $\sin\angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$; $\cos\angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$. **22.** 0,8.

Таблица 20

1. $6\sqrt{3}$. **2.** 60°. **3.** 30°. **4.** 120°. **5.** 9. **6.** $3\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$. **7.** 16 или 9. **8.** 60°. **9.** 15. **10.** $AM = 10$; $BM = 10\sqrt{5}$. **11.** $AB = 12$; $CD = 16$. **12.** 2. **13.** 20; 20. **14.** $1{,}2\sqrt{6}$. **15.** 20. **16.** 40; 40. **17.** 14. **18.** 6. **19.** 24; 24. **20.** 8,5; 8,5. **21.** $12(2+\sqrt{3})$. **22.** 70. **23.** $2{,}8\sqrt{51}$.

Таблица 21

1. 39°. **2.** 8. **3.** $32\sqrt{2}$. **4.** 70°. **5.** 100°. **6.** 28°. **7.** 110°. **8.** 101°. **9.** 44°. **10.** 32°. **11.** 40°. **12.** 3,5. **13.** 12. **14.** 50°. **15.** 1,4. **16.** 40°. **17.** 4. **18.** 18°. **19.** 157°. **20.** 45°. **21.** 100°. **22.** 75°. **23.** $5\sqrt{3}$. **24.** 80°. **25.** 30. **26.** 10. **27.** 114°. **28.** 16. **29.** 10. **30.** 28,125. **31.** 15. **32.** 1. **33.** $8\sqrt{3}$. **34.** 14,4. **35.** 12. **36.** $30\sqrt{3}$. **37.** 100°. **38.** 7,5. **39.** $8\sqrt{3}$. **40.** 10. **41.** 15. **42.** $8\sqrt{5}$. **43.** 6. **44.** $4\sqrt{145}$. **45.** 157°30′. **46.** 70°. **47.** 40°. **48.** 123°45′. **49.** 40°. **50.** 100°. **51.** 82°30′. **52.** 108°. **53.** 67°30′. **54.** 10°.

Таблица 22

1. 20. **2.** 24°. **3.** 38°. **4.** 7. **5.** 24. **6.** 10. **7.** $2\sqrt{61}$. **8.** $20\sqrt{3}$. **9.** 130°. **10.** 4. **11.** 10. **12.** 4,8. **13.** 180. **14.** 80. **15.** 15. **16.** $64\sqrt{3}$. **17.** 240/13.

Таблица 23

1. 20/3. **2.** 120. **3.** 60. **4.** 27. **5.** 40. **6.** 80. **7.** $\angle L = \angle M = 63°$; $\angle E = 54°$. **8.** $\angle A = 66°$; $\angle B = 24°$; $\angle ACB = 90°$. **9.** $5\sqrt{3}$. **10.** 100°. **11.** 4. **12.** 6. **13.** 9. **14.** $20(\sqrt{3}+1)$. **15.** 25/8. **16.** 4. **17.** 16. **18.** 10. **19.** $12\sqrt{3}$. **20.** 60°. **21.** 216. **22.** 128. **23.** 40. **24.** 3. **25.** 8. **26.** 15. **27.** 4. **28.** 6. **29.** 8. **30.** 13. **31.** 6. **32.** $48\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$. **33.** 8. **34.** $4(\sqrt{3}+1)$. **35.** $ME = 8\sqrt{5}$; $EF = 12$. **36.** 96.

37. $RK = 18$; $QK = 24$. **38.** 30. **39.** 25. **40.** 4. **41.** 28. **42.** 6. **43.** 10. **44.** 3. **45.** $13/4\sqrt{61}$. **46.** 16. **47.** 960. **48.** 30 или 40. **49.** 25/6. **50.** 240. **51.** 1,2. **52.** 80. **53.** $AB = 24$; $DC = 30$. **54.** $\angle M = 127°$; $\angle N = 105°$. **55.** 10. **56.** 12. **57.** 30. **58.** $MN = 6$; $NK = 18$; $KL = 21$; $LM = 9$. **59.** $5\sqrt{3}$. **60.** $100\sqrt{2}$. **61.** 36. **62.** 66°; 66°; 114°; 14°. **63.** 94,08. **64.** 384. **65.** 16. **66.** 10. **67.** $48\sqrt{3}$. **68.** 4. **69.** 10. **70.** $5\sqrt{2}$. **71.** 3. **72.** 20. **73.** 80. **74.** 20. **75.** 3. **76.** 168. **77.** 720. **78.** 6. **79.** 10. **80.** 10. **81.** 30°. **82.** 588. **83.** 9,6. **84.** $42\sqrt{6}$. **85.** 11. **86.** 15.

Таблица 24

1. а) $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{e}$; $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{p}$; б) $\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{k}$; $\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{f}$; в) $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{c}$; $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{d}$; $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{a}$; $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{б}$. **2.** а) $\vec{c}$ и $\vec{n}$; $\vec{c}$ и $\vec{m}$; $\vec{m}$ и $\vec{n}$; $\vec{a}$ и $\vec{б}$; б) $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{m}$; $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{б}$; в) $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{n}$; $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{m}$; г) $\vec{a} = \vec{б}$, $\vec{c} = \vec{m}$. **3.** а) $\vec{m}$ и $\vec{a}$; $\vec{m}$ и $\vec{б}$; $\vec{n}$ и $\vec{d}$; б) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{б}$; в) $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{d}$; $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{a}$; $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{б}$; г) нет. **8.** 0. **12.** DF. **13.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{б}$. **14.** $OM = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{б}$; $MA = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{б}$. **15.** $RK = -\vec{n}$; $KT = -\vec{m} + \vec{n}$; $SR = \vec{m} - \vec{n}$. **16.** $EA = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$; $FB = \frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n}$. **17.** $KO = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{б}$. **18.** $AK = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{б}$; $KB = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{б}$. **19.** $AM = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{б}$. **20.** $KE = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$. **21.** $BM = -\vec{m}$; $NC = \vec{n}$; $MN = -\vec{m} + \vec{n}$; $BN = -2\vec{m} + \vec{n}$. **26.** 12. **27.** 6. **28.** 13. **29.** 8. **30.** 2. **31.** 32. **32.** 36. **33.** $\sqrt{73}$. **34.** $|BD| = \sqrt{194}$; $|CD| = 5\sqrt{2}$; $|AC| = \sqrt{89}$. **35.** 3. **36.** а) $a\sqrt{3}$; б) a; в) $a\sqrt{3}$; г) a; д) a. **37.** 1) −4; 2) 20; 3) 28; 4) 20; 5) 28; 6) 20; 7) −4; 8) 20.

Таблица 25

1. 80. **2.** 7,5. **3.** $SM = 16$; $QR = 24$. 4. $NE = 20$; $MF = 40$. **5.** 8. **6.** $ST = 10$; $MN = 20$. **7.** 10. **8.** $RT = 26$; $EF = 18$. **9.** $MN = 5$; $DC = 3$. **10.** 6. **11.** 8. **12.** 4. **13.** 6. **14.** 9. **15.** 9,5. **16.** 0,5. **17.** 30. **18.** 14. **19.** 12. **20.** 9,8. **21.** $3\sqrt{2}/2$. **22.** 5. **23.** 8. **24.** 10. **25.** 14,15. **26.** $BC = 2$; $AD = 6$.

9 класс

Таблица 1

1. $LN = \vec{m} - \vec{n}$; $KM = \vec{m} + \vec{n}$. **2.** $BD = -\vec{a} - \vec{б}$; $CA = -\vec{a} + \vec{б}$. **3.** $EK = -\vec{m} + \vec{n}$; $FM = \vec{m} + \vec{n}$. **4.** $TM = \vec{a} - \vec{б}$; $ST = -\vec{a} - \vec{б}$. **5.** $FT = \frac{3}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{n}$.

6. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) −1; д) −1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число не существует.

Таблица 2

1. $O(0;\ 0)$, $K(3;\ 0)$, $M(0;\ 2)$. **2.** $O(0;\ 0)$, $T(6;\ 0)$, $M(6;\ 3)$, $C(0;\ 3)$. **3.** $Q(-2;\ 2)$, $P(2;\ 2)$, $N(2;\ -2)$. **4.** $T(14;\ -6)$. **5.** $MN\{-5;\ -1\}$. **6.** $M(4;\ 4)$. **7.** $C(-2;\ 32)$. **8.** 16 или −8. **9.** 3 или −2,6. **10.** $\sqrt{5}$. **11.** $\sqrt{26}$. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $M(-3;\ 3)$. **14.** $C(2{,}5;\ 4)$. **15.** $K(18;\ 12)$. **16.** 16. **17.** ≈12,9. **18.** $AC = \sqrt{13}$; $OC = \sqrt{85}$; $C(9;\ 2)$. **19.** $\sqrt{241}/2$. **20.** $BC = \sqrt{41}$; $OB = \sqrt{65}$.

Таблица 3

1. 50; 50. **2.** $2\sqrt{85}$. **3.** 26. **4.** $\angle A = 60°$; $\angle B = 30°$; $\angle C = 90°$. **5.** $2\sqrt{109}$. **6.** $2\sqrt{53}$. **7.** $2\sqrt{19}$. **8.** $\angle M = \angle P = 45°$; $\angle N = 90°$. **9.** $\sqrt{185}/2$.

Таблица 4

1. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **2.** B, C, D. **3.** $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$. **4.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **5.** $(x - 3)^2 + y^2 = 13$. **6.** $x^2 + y^2 = 13$. **7.** $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$. **9.** а) (2; −3), (2; 3); б) (−2; 3), (2; 3). **10.** а) (2; 7), (2; 1); б) (5; 4), (−1; 4). **11.** $x^2 + y^2 = 40$. **12.** $x^2 + (y - 2)^2 = 10$. **13.** $x^2 + (y - 4)^2 = 25$. **14.** $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

Таблица 5

1. $x = 3$. **2.** $y = 10$. **3.** 4. **4.** $y + 5x = 0$. **5.** 1. **6.** $7x - y + 3 = 0$. **7.** 13,5. **8.** $7x - y + 6 = 0$. **9.** $x - y = 0$. **10.** $2x - 5y + 20 = 0$; $2x + 5y - 20 = 0$; $2x - 5y - 20 = 0$; $2x + 5y + 20 = 0$.

Таблица 6

1. $\sqrt{2}$. **2.** $25\sqrt{3}/4$. **3.** $4\sqrt{5}$. **4.** 24. **5.** 60. **6.** $25\sqrt{2}/4$. **7.** $5\sqrt{3}$. **8.** 50. **9.** 30. **10.** $80\sqrt{3}$. **11.** $60\sqrt{2}$. **12.** 128. **13.** 169. **14.** $36\sqrt{3}$. **15.** $5\sqrt{3}$. **16.** $16\sqrt{2}$. **17.** 32. **18.** $16\sqrt{2}$. **19.** 16.

Таблица 7

1. $x = 8\sqrt{2}$; $y = 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$. **2.** $x \approx 19{,}9$; $y \approx 25{,}6$. **3.** $x \approx 16{,}3$; $y \approx 22{,}3$. **4.** $x \approx 13{,}9$; $y \approx 9{,}8$. **5.** $x \approx 1{,}8$; $y \approx 0{,}5$. **6.** $x \approx 8{,}8$; $y \approx 12$. **7.** $x \approx 10{,}4$; $y \approx 14{,}1$. **8.** $x \approx 14{,}1$; $y \approx 19{,}3$. **9.** $x = 6{,}5$; $y \approx 4{,}9$. **10.** $x \approx 8{,}3$; $y \approx 14{,}3$. **11.** $x \approx 9{,}9$; $y \approx 9{,}6$. **12.** $x = 1$; $y = \sqrt{6}/3$. **13.** $x \approx 27{,}3$; $y \approx 17{,}8$.

14. $x=\sqrt{52-24\sqrt{2}}\approx 4{,}2$; $y=\sqrt{52+24\sqrt{2}}\approx 9{,}3$. **15.** $x=y\approx 11$. **16.** $x=4\sqrt{19}$; $y=4\sqrt{7}$. **17.** $x\approx 22{,}7$; $y\approx 24{,}3$.

Таблица 8

1. $\approx 30{,}8$. **2.** $\approx 18°$. **3.** $\sqrt{13}$. **4.** $175/4\sqrt{66}$. **5.** $x=4\sqrt{14}/3$; $y=26/3$. **6.** $\sqrt{63}$. **7.** $x\approx 5{,}8$; $y\approx 4{,}1$. **8.** $x\approx 15{,}5$; $y\approx 18{,}4$. **9.** $x\approx 3{,}9$; $y\approx 10{,}3$. **10.** $x=13$; $y=21$. **11.** $x=7$; $y=15$. **12.** $x=18$; $y=48$. **13.** $x=9$; $y=12$. **14.** 13. **15.** $x=16{,}8$; $y=36$. **16.** $x=8$; $y=30$. **17.** $x=168\sqrt{2}/5$; $y=25$. **18.** $x=10$; $y=15$. **19.** $x_1=25$; $y_1=25$; $x_2\approx 10{,}5$; $y_2\approx 32{,}2$; $x_3\approx 36{,}7$; $y_3\approx 24{,}5$; . **20.** $x=20$; $y=30$. **21.** $\sqrt{118}/2$. **22.** 1) $x=21\sqrt{6}/2$; $y=15\sqrt{6}/2$; 2) $x=51\sqrt{66}/22$; $y=15\sqrt{66}/22$. **23.** $x=11$; $y=7$. **24.** $x=17$; $y=6$.

Таблица 9

1. 45°. **2.** 10. **3.** −32. **4.** −10. **5.** $3\sqrt{2}$. **6.** 0,2. **7.** 0. **8.** 0,6. **9.** 50. **10.** 0. **11.** 8. **12.** −12,5. **13.** 6,75. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 90°. **17.** 60°. **18.** 0. **19.** −60. **20.** 90°.

Таблица 10

1. 6π. **2.** 67,5. **3.** 12π. **4.** 8. **5.** 12. **6.** $8\sqrt{3}\,\pi$. **7.** 26π. **8.** 52π. **9.** $20\pi\sqrt{3}/9$. **10.** 60°. **11.** 144°; 216°. **12.** 225°; 135°. **13.** $7\pi/\pi — 3$. **14.** 40π. **15.** 20π. **16.** 40π. **17.** 32π. **18.** $8\pi\sqrt{3}$. **19.** $7\sqrt{5}\,\pi$. **20.** $\dfrac{85}{6}\pi$. **21.** $32\pi/\sqrt{3}$. **22.** $98\pi\sqrt{5}/15$. **23.** $16\pi/\sqrt{3}$.**24.** $8\pi(\sqrt{3}-1)$. **25.** 20π. **26.** $6\pi(\sqrt{2}-1)$. **27.** 15π.

Таблица 11

1. 4. **2.** 64π. **3.** $100\pi/(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\approx 49{,}5$. **4.** 12π. **5.** 20π. **6.** $18\pi(2-\sqrt{3})$. **7.** 4π. **8.** $144\pi(3-2\sqrt{2})$. **9.** π. **10.** 25π. **11.** $\dfrac{27}{32}\pi$. **12.** π. **13.** 50π. **14.** 25π. **15.** $60{,}5\pi$. **16.** $86\pi/4-\pi$. **17.** $456\pi/\pi-2$. **18.** $\dfrac{400}{3}\pi$. **19.** $\left(\dfrac{625}{48}\right)^2\pi\approx 169{,}5\pi$. **20.** 3. **21.** $6{,}25\pi$. **22.** 8. **23.** 5π. **24.** 32π.

Таблица 12

1. $12(2\pi-3\sqrt{3})$. **2.** $\approx 7{,}6$. **3.** 9. **4.** $\approx 413{,}2$. **5.** 10π. **6.** $100(\pi-2)$. **7.** $128\pi/3$. **8.** $16(4-\pi)$. **9.** $25(8-\pi)$. **10.** $75(\pi-1{,}5\sqrt{3})\approx 40{,}6$. **11.** $\approx 182{,}5$. **12.** $36(4-\pi)\approx 31$.

Содержание

Предисловие ... 3

Раздел I. **Краткие теоретические сведения** ... 5

Раздел II. **Упражнения в таблицах** ... 28

VII класс

Таблица 1. Смежные углы ... 28
Таблица 2. Вертикальные углы ... 30
Таблица 3. Признаки равенства треугольников ... 32
Таблица 4. Периметр равнобедренного треугольника ... 36
Таблица 5. Свойства равнобедренного треугольника ... 38
Таблица 6. Признаки параллельности прямых ... 40
Таблица 7. Свойства углов при параллельных прямых ... 45
Таблица 8. Углы треугольника ... 47
Таблица 9. Углы треугольника ... 48
Таблица 10. Некоторые свойства прямоугольных треугольников ... 52
Таблица 11. Признаки равенства прямоугольных треугольников ... 56
Таблица 12. Расстояние от точки до прямой ... 57

VIII класс

Таблица 1. Определение и признаки параллелограмма ... 59
Таблица 2. Свойства параллелограмма ... 61
Таблица 3. Свойства параллелограмма ... 64
Таблица 4. Параллелограмм ... 66
Таблица 5. Параллелограмм ... 68
Таблица 6. Трапеция ... 69
Таблица 7. Трапеция ... 72
Таблица 8. Площадь прямоугольника ... 73
Таблица 9. Площадь параллелограмма ... 76
Таблица 10. Площадь треугольника ... 79
Таблица 11. Площадь трапеции ... 82
Таблица 12. Теорема Пифагора ... 86

Таблица 13. Определение подобных треугольников 93
Таблица 14. Признаки подобия треугольников 98
Таблица 15. Признаки подобия треугольников 102
Таблица 16. Средняя линия треугольника 105
Таблица 17. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике 108
Таблица 18. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 110
Таблица 19. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 112
Таблица 20. Касательная к окружности 115
Таблица 21. Центральные и вписанные углы 118
Таблица 22. Четыре замечательные точки треугольника 125
Таблица 23. Вписанная и описанная окружности 127
Таблица 24. Векторы 138
Таблица 25. Средняя линия трапеции 144

IX класс

Таблица 1. Координаты вектора 148
Таблица 2. Простейшие задачи в координатах 149
Таблица 3. Применение метода координат к решению задач 152
Таблица 4. Уравнение окружности 154
Таблица 5. Уравнение прямой 156
Таблица 6. Решение треугольников. Площадь треугольника 158
Таблица 7. Решение треугольников. Теорема синусов 162
Таблица 8. Решение треугольников. Теорема косинусов 164
Таблица 9. Скалярное произведение векторов 168
Таблица 10. Длина окружности. Длина дуги 171
Таблица 11. Площадь круга 176
Таблица 12. Площадь круга 179

***Раздел III.* Решения некоторых задач** 181
VII класс 181
VIII класс 183
IX класс 198

Ответы 213

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ

7–9 классы

Ответственный редактор *С.Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 12.11.2012.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,48. Тираж 3000 экз.
Заказ № 4699/1

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Сайт издательства: **www.phoenixrostov.ru**
Интернет-магазин: **www.phoenixbooks.ru**

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов
в ООО «Кубаньпечать»
350059, г. Краснодар, ул. Уральская, 98/2